



# Résolution des équations d'Euler par un schéma de Van Leer en éléments finis

Loula Fatima Fezoui

## ► To cite this version:

Loula Fatima Fezoui. Résolution des équations d'Euler par un schéma de Van Leer en éléments finis. [Rapport de recherche] RR-0358, INRIA. 1985, pp.48. inria-00076199

**HAL Id: inria-00076199**

**<https://inria.hal.science/inria-00076199>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNITÉ DE RECHERCHE  
INRIA-SOPHIA ANTIPOLIS

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France

Tél. (1) 39 63 55 11

*Call 11*

Rapports de Recherche

N° 358

**RÉSOLUTION  
DES ÉQUATIONS D'EULER  
PAR UN SCHÉMA DE VAN LEER  
EN ÉLÉMENTS FINIS**

**Fatima FEZOUI**

**Janvier 1985**

RESOLUTION DES EQUATIONS D'EULER

PAR UN SCHEMA DE VAN LEER

EN ELEMENTS FINIS \*

=====

FATIMA FEZOU I \*

=====

\* Ce travail est partiellement supporté par la DRET sous le contrat 84/014  
\* INRIA - SOPHIA ANTIPOLIS 06560 VALBONNE

#### ABSTRACT :

We consider the simulation of a two dimensional flow modeled by the Euler Equations.

We present an explicit second order accurate upwind-centered scheme of Van Leer type for the numerical solution of the equations.

The scheme contains no artificial viscosity parameter, and can be used with general triangular meshes.

Numerical tests experiments on three classical problems are presented : the shock tube problem ; a transonic flow through a channel with a circular bump ; a flow around a NACA 0012 airfoil.

The results of these experiments are compared with those obtained with a centered scheme.

#### RESUME :

On s'intéresse à la simulation des écoulements bidimensionnels stationnaires régis par les équations d'Euler.

On présente ici, pour la résolution numérique de ces équations, un schéma explicite, décentré, d'ordre deux de type Van Leer. Le schéma ne comporte pas de paramètre de viscosité à ajuster et est utilisable sur des triangulations quelconques.

Des expériences numériques ont été faites sur trois problèmes classiques : tube à choc, écoulement transsonique dans un canal avec obstacle en arc de cercle, écoulement autour d'un profil NACA0012.

Les résultats de ces expériences sont comparés à ceux obtenus avec un schéma centré.

## 0. INTRODUCTION

Le travail dont nous présentons ici les premiers résultats est réalisé au sein de l'équipe de recherche INRIA - AMD/BA.

Un des objectifs de l'équipe dans ce domaine est la construction de schémas stables, précis (au deuxième ordre au moins), utilisables avec des géométries complexes et s'étendant au cas tridimensionnel.

Le schéma d'ordre deux présenté dans [1],[2], répond à ces objectifs avec cependant l'inconvénient majeur qu'il utilise une viscosité artificielle dépendant d'un paramètre qu'il faut éventuellement ajuster lors d'un nouvel essai.

Le but que nous nous fixons est de produire un code ayant les mêmes qualités que le précédent sans le réglage de la viscosité. Nous nous sommes inspirés pour réaliser ce travail, des idées et résultats de Van Leer [8],[9],[10] et de Vijayasundaram [11], [12], [13].

Les choix que nous avons faits pour la construction du schéma sont les suivant.

### 1 - Le\_décentrage

Dans les articles cités plus haut, Van Leer montre qu'en général et pour un même ordre de précision, les schémas décentrés ont une erreur de phase plus petite que les centrés et donnent un meilleur profil du choc.

Ils sont par ailleurs plus faciles à implémenter et moins coûteux que les schémas utilisant des solveurs approchés de Riemann.

## 2 - La précision

Nous construisons le schéma décentré d'ordre deux à partir d'un schéma d'ordre un en suivant la procédure donnée par Van Leer [10].

## 3 - La monotonie

Ne voulant pas introduire de viscosité artificielle dans le schéma, il faut donc que la viscosité due au décentrage soit suffisante pour approcher sans oscillation la solution physique du problème.

C'est le cas des schémas dits monotones (exemple : le schéma d'ordre un de Godunov).

Soit  $u(x,t)$  l'approximation aux différences finies de la solution recherchée

Notons  $u_i^n = u(i\Delta x, n\Delta t)$

où  $\Delta x$  et  $\Delta t$  désignent respectivement les pas d'espace et de temps.

On dit qu'un schéma aux différences finies :

(M)

$$u_i^{n+1} = H(u_{i-k}^n, u_{i-k+1}^n, \dots, u_{i+k}^n)$$

est monotone si  $H$  est une fonction monotone croissante de chacun de ses arguments.

On montre [4], que les schémas monotones en formulation conservative sont nécessairement d'ordre un.

Si on veut augmenter la précision, on cherchera des schémas, qui sans être monotones, préservent cependant la monotonie.

On dit qu'un schéma aux différences finies

$$u^{n+1} = L u^n$$

(p.m.)

préserve la monotonie si :

$$u^n \text{ fonction monotone en } x \implies L u^n \text{ monotone en } x.$$

Cette dernière propriété n'est pas toujours facile à obtenir, surtout dans les cas de dimension supérieure à un.

En pratique, on se retrouve souvent devant cette alternative :

- préservation de la monotonie (d'où en principe: pas d'oscillation) mais un risque de perdre de la précision
- ou maintien de la précision (d'ordre deux ou plus), avec le risque alors de voir apparaître des oscillations parasites au niveau du choc notamment.

Pour plus de détails concernant ces schémas, on pourra consulter [3], [4], [5] ainsi que les articles de Van Leer cités en référence.

Question : Comment construire un schéma qui vérifie la propriété (p.m.) ?

Dans les articles cités plus haut, Van Leer propose une technique dite des limiteurs.

Le principe consiste à se fixer un "critère de monotonie", et à corriger les valeurs de la fonction calculée, partout où ce critère risque d'être violé.

En dimension un, Van Leer donne un critère de monotonie et une formule de moyenne pour calculer les pentes, qui fait que le critère est automatiquement observé.

Le schéma obtenu est d'ordre deux et préserve la monotonie. Le problème consiste à trouver une généralisation de ce critère au cas bidimensionnel.

On citera, dans cette direction le travail de Montagné [6], qui dans le cas d'une triangulation par des rectangles, utilise le critère de monotonie de Van Leer dans chaque direction d'espace séparément.

Il obtient un schéma stable, peu diffusif, précis au second ordre. Mais la propriété (p.m.) n'est pas rigoureusement vérifiée.

Par ailleurs, l'application de ce procédé au cas d'un maillage quelconque ne nous paraît pas évidente.

#### PRESENTATION DU SCHEMA

Le schéma d'ordre deux de Hancock-Van Leer (HVL) repose sur tous les choix précédents.

Vijayasundaram [11] a testé ce schéma sur le problème du tube à choc en dimension un. La comparaison avec d'autres schémas (centrés et décentrés) incitait à son développement et son extension à deux dimensions : c'est l'objet de ce travail.

##### a - Le schéma d'ordre un utilisé :

Le schéma d'ordre un utilisé dans [11] est une version du schéma décentré de premier ordre de Godunov.

Il est remplacé ici par un Q-schéma dont les avantages par rapport au premier seront rappelés plus loin.

On trouvera une description de cette classe de schémas dans [10] et [7] [5] entre autres.

##### b - Limiteurs

Nous avons constaté, par des essais numériques, que pour un maillage



quelconque en dimension deux, le procédé de limitation de Van Leer produit une trop grande viscosité numérique d'où une dégradation importante de la précision.

En effet, en appliquant le procédé de limitation de Van Leer, on annule systématiquement la dérivée de la fonction approchée, en un point dès qu'une dérivée dans la direction d'un point voisin est nulle. On appellera cette technique : "limitation globale".

Ce critère nous paraissant trop sévère, nous avons choisi de limiter uniquement les valeurs d'intégration : "limitation ponctuelle".

En conséquence, le schéma ne vérifie pas la propriété (p.m.) mais l'amplitude des oscillations reste faible et le schéma est stable et d'ordre deux.

Par ailleurs, cette technique de limitation est indépendante du maillage choisi.

Le plan est le suivant :

## I. CAS MONODIMENSIONNEL

- I.1 Le problème continu
- I.2 Description du schéma
  - I.2.1 Approximation en espace
  - I.2.2 Le schéma en temps
- I.3 Le schéma H.V.L
- I.4 Expériences numériques

## II. CAS BIDIMENSIONNEL

- II.1 Le problème continu
- II.2 Description du schéma
  - II.2.1 Approximation en espace
  - II.2.2 Le schéma en temps
- II.3 Expériences numériques

## III. BIBLIOGRAPHIE

## I. LE CAS MONODIMENSIONNEL

### I.1 Le problème continu

Les équations d'Euler s'écrivent en formulation conservative :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_t + F(W)_x = 0 \\ W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix} \quad F(W) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e + p) u \end{bmatrix} \\ p = (\gamma - 1) \left( e - \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \quad \gamma = 1.4 \end{array} \right.$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $u$  la vitesse,  $p$  la pression et  $e$  l'énergie totale par unité de masse.

Le système (1.1) s'écrit sous forme matricielle

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_t + A(W) W_x = 0 \\ \text{où } A(W) = F'(W) \end{array} \right.$$

Le système (1.2) s'écrit en variables physiques  $\rho, u, p$

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{W}_t + \tilde{A}(\tilde{W}) \tilde{W}_x = 0 \\ \tilde{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix} \quad \tilde{A}(\tilde{W}) = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Les matrices  $\tilde{A}(\tilde{W})$  et  $A(W)$  sont semblables et diagonalisables.

On a :

$$A = T \Lambda T^{-1}$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_j)$$

$\lambda_j : j = 1, 3 = \text{valeurs propres de } A$

On note :

$$A^{\pm} = T \Lambda^{\pm} T^{-1}$$

$$\Lambda^{\pm} = \text{diag}(\lambda_j^{\pm})$$

$$\lambda_j^{+} = \max(\lambda_j, 0)$$

$$\lambda_j^{-} = \min(\lambda_j, 0)$$

$$|A| = A^{+} - A^{-}$$

Nous utiliserons aussi l'homogénéité de la fonction de flux  $F$ . ie :

$$F(W) = F'(W) W = A(W) W$$

Nous voulons résoudre le problème (1.1) sur un ouvert borné :

$$] 0, 1[ \times ] 0, T[ \quad \text{par exemple ;}$$

$$0 < T < \infty \quad ; \quad \text{avec la condition initiale :}$$

$$(1.4) \quad W(x, 0) = W_0(x) \quad x \in ] 0, 1[$$

Nous préciserons cette condition initiale ainsi que la condition sur le bord pour chaque cas de problème traité numériquement (paragraphe 1.4)

## I.2 Description du schéma

### I.2.1 Approximation en espace

Soit  $\Delta x$  le pas d'espace

On note :

$$x_i = i \Delta x$$

$$W_i = W(x_i, t)$$

On interpole linéairement  $W$  sur chaque intervalle  $] x_i - 1/2, x_i + 1/2 [$  ; qu'on appellera cellule  $C_i$ .

$$W(x, t) = W_i + \frac{(x - x_i)}{\Delta x} p_i \quad x \in C_i$$

où  $p_i$  est une approximation de la pente de  $W$  sur  $C_i$

$$(1.5) \quad p_i = \frac{W_{i+1} - W_{i-1}}{2}$$

### I.2.2 Le schéma en temps

Le schéma que nous utilisons appartient à la classe des schémas à 2 pas avec une étape de prédiction et une étape de correction.

Quelques notations :

Soit  $\Delta t$  le pas de temps

$$t^n = n \Delta t$$

$$W_i^n = W(x_i, t^n)$$

$$F_i^n = F(W_i^n)$$

$$A_i^n = A(W_i^n)$$

$$\delta = \Delta t / \Delta x$$

### A - Première étape : prédiction

A partir de (1.3) on calcule une approximation du premier ordre de  $\tilde{W}$  à l'instant  $t^{n+1/2} = (n + 1/2) \Delta t$  ; en variables physiques :

$$\tilde{W}_t \approx \frac{\tilde{W}^{n+1/2} - \tilde{W}^n}{\Delta t/2} = -\tilde{A}_i^n (\tilde{W}_x^n)_i$$

d'où

$$\tilde{W}_i^{n+1/2} = \tilde{W}_i^n - \frac{\delta}{2} \tilde{A}_i^n \tilde{P}_i^n$$

avec

$$\tilde{P}_i^n = \frac{\tilde{W}_{i+1}^n - \tilde{W}_{i-1}^n}{2} \approx \Delta_x (\tilde{W}_x^n)_i$$

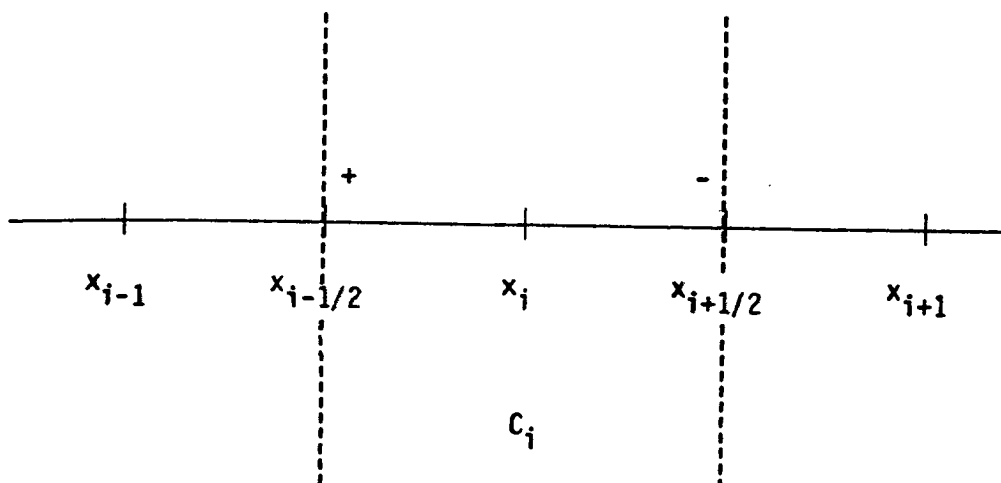
### B - Deuxième étape : correction

#### B.1. Calcul des valeurs aux bords de la cellule $C_i$

On utilise l'interpolation linéaire de  $W$  sur  $C_i$  à l'instant  $t^n$  pour déterminer ses valeurs aux bords de  $C_i$  à l'instant  $t^{n+1/2}$

Ces valeurs sont calculées en variables physiques.

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{W}_{i+1/2}^{n+1/2} = \tilde{W}_i^{n+1/2} + \frac{1}{2} \tilde{P}_i^n \quad (\text{valeurs en } x_{i+1/2}^-) \\ \tilde{W}_{i-1/2}^{n+1/2} = \tilde{W}_i^{n+1/2} - \frac{1}{2} \tilde{P}_i^n \quad (\text{valeurs en } x_{i-1/2}^+) \end{array} \right.$$



## B.2. Limitation ponctuelle

On omet dans cette partie, l'indice supérieur  $n+1/2$ .

On pose la condition de monotonie suivante :

$$(C_1) \quad \begin{cases} \text{Min} (\tilde{W}_i, \tilde{W}_{i+1}) \leq \tilde{W}_{i+1/2}^- \leq \text{Max} (\tilde{W}_i, \tilde{W}_{i+1}) \\ \text{Min} (\tilde{W}_i, \tilde{W}_{i-1}) \leq \tilde{W}_{i-1/2}^+ \leq \text{Max} (\tilde{W}_i, \tilde{W}_{i-1}) \end{cases}$$

Les valeurs aux bords de la cellule, calculées par (1.6) ne vérifient pas toujours cette condition.

On définit alors de nouvelles valeurs "limitées" par :

$$\tilde{W}_{i+1/2}^{\text{lim}-} = \text{Max} [\text{Min} (\tilde{W}_{i+1/2}^-, \text{Max} (\tilde{W}_i, \tilde{W}_{i+1})), \text{Min} (\tilde{W}_i, \tilde{W}_{i+1})]$$

$$\tilde{W}_{i-1/2}^{\text{lim}+} = \text{Max} [\text{Min} (\tilde{W}_{i-1/2}^+, \text{Max} (\tilde{W}_i, \tilde{W}_{i-1})), \text{Min} (\tilde{W}_i, \tilde{W}_{i-1})]$$

### B.3 Calcul des flux

Les flux des variables conservatives sont calculés de part et d'autre de la cellule, en fonction du prédicteur.

On pose :

$$(1.7) \quad \phi_{i+1/2}^{n+1/2} = \phi(W_{i+1/2}^{n+1/2-}, W_{i+1/2}^{n+1/2+})$$

où la fonction de flux numérique  $\phi$  est définie par :

$$\phi(u,v) = \frac{F(u) + F(v)}{2} + \frac{1}{2} |A\left(\frac{u+v}{2}\right)| (u - v)$$

Cette fonction de flux numérique est du type Q-schéma (cf [7] , [10]) car elle est de la forme :

$$(1.8) \quad \phi(u,v) = \frac{F(u) + F(v)}{2} + \frac{1}{2} Q(u,v) (v-u)$$

### B.4. Calcul de $W^{n+1}$

Les flux étant calculés avec les valeurs "limitées" de  $W$  aux bords de la cellule, on calcule  $W$  à  $t = (n + 1) \Delta t$  par :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \delta \left( \phi_{i+1/2}^{n+1/2} - \phi_{i-1/2}^{n+1/2} \right)$$



### I.3 LE SCHEMA HVL

On pourra se référer à [13], pour une description détaillée du schéma de Hancock-Van Leer (HVL) ; nous nous contenterons de relever ici ce qui le différencie du schéma présenté en I.2.

#### I.3.1 Limitation globale

Dans le cas du schéma HVL la limitation a lieu sur les pentes.

Notons  $P_i$  l'approximation de la pente  $(W_x)_i$  de  $W$  sur la cellule  $C_i$ , alors  $P_i$  doit vérifier

$$(C_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \frac{P_i}{W_{i+1} - W_i} |x_{i+1} - x_i| \leq 2 \\ 0 \leq \frac{P_i}{W_i - W_{i-1}} |x_i - x_{i-1}| \leq 2 \end{array} \right.$$

Van Leer [11] propose une formule qui vérifie grosso modo cette condition :

$$P_i = \frac{(a^2 + \epsilon^2) b + (b^2 + \epsilon^2) a}{a^2 + b^2 + 2\epsilon^2}$$

avec  $a = W_{i+1} - W_i$ ,  $b = W_i - W_{i-1}$  et où  $\epsilon^2$  est un nombre de l'ordre de  $(\Delta x)^3$ .

Remarque : On voit clairement que  $(C_2)$  est plus sévère que  $(C_1)$ .

Cependant la condition  $(C_1)$  est indépendante de la dimension de l'espace, et du maillage utilisé. Une généralisation de  $(C_2)$  au cas bidimensionnel est possible dans le cas d'un maillage orthogonal.

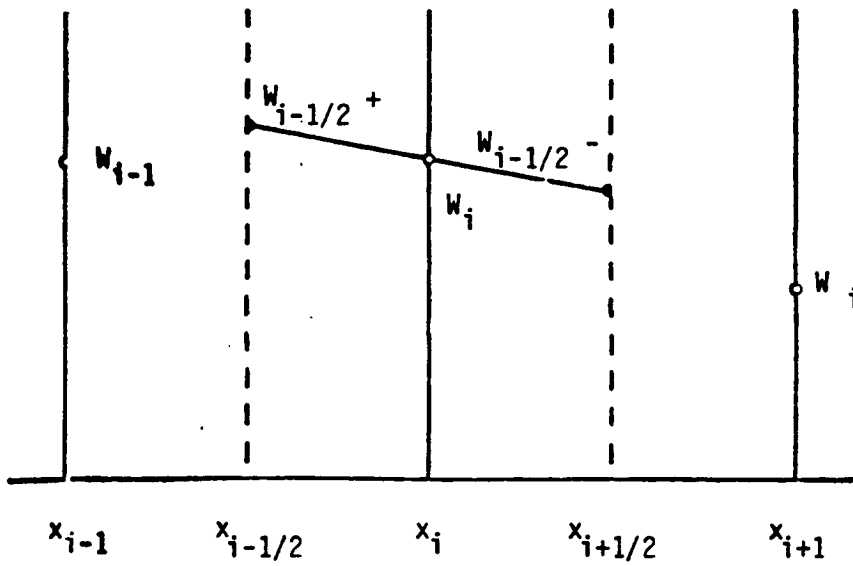
C'est donc une condition plus adaptée au cadre des différences finies.

### I.3.2 Le calcul des flux :

Il est important de noter la différence entre la fonction de flux numérique utilisée ici (qu'on retrouvera dans l'article [10] de Van Leer), avec celle utilisée dans la version présentée et testée dans [13]. Ceci afin de ne pas fausser les comparaisons, les différences dans les tests numériques étant sensibles d'ailleurs, dans les profils de choc bidimensionnels.

Dans la version présentée dans [13], la fonction de flux numérique est celle du schéma d'ordre un de Godunov

$$\text{ie : (1.10) } \Phi(u,v) = F\left(\frac{u+v}{2}\right) + \frac{1}{2} \left| A \frac{(u+v)}{2} \right| (u-v).$$



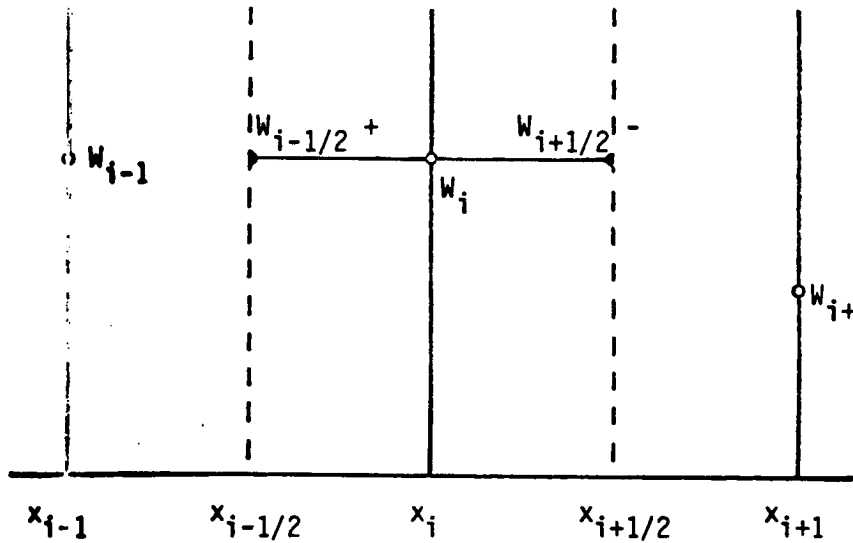
1° Pas de limitation

Pente

$$P_i = \frac{W_{i+1} - W_{i-1}}{2}$$

Valeurs d'intégration

$$\cdot W_{i-1/2}^+ = W_i + \frac{\Delta x}{2} P_i$$



2° Limitation globale

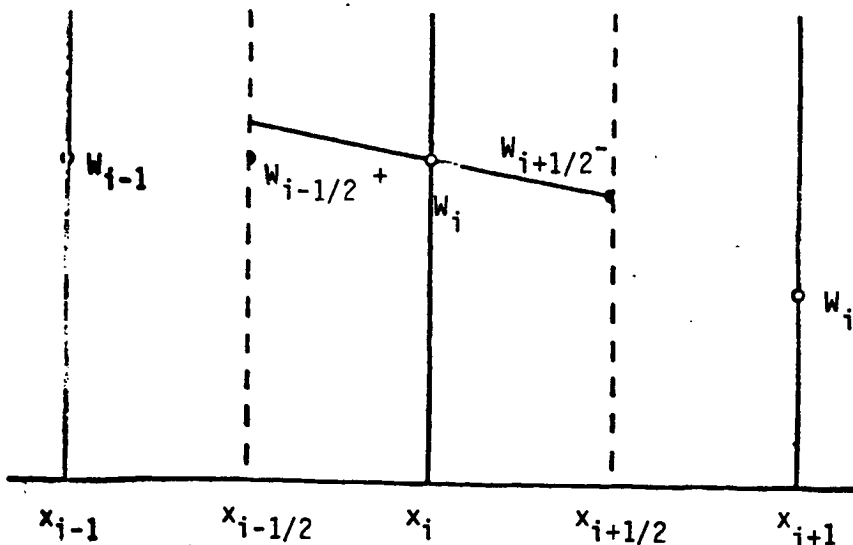
Pente

$$P_i = 0$$

Valeurs d'intégration

$$\cdot W_{i-1/2}^+ = W_i$$

$$\cdot W_{i+1/2}^- = W_i$$



3° Limitation ponctuelle

Pente

$$P_i = \frac{W_{i+1} - W_{i-1}}{2}$$

Valeurs d'intégration

$$\cdot W_{i-1/2}^+ = W_i$$

$$\cdot W_{i+1/2}^- = W_i + \frac{\Delta x}{2} P_i$$

#### 1.4 Expériences numériques

Un test numérique en dimension un, a été réalisé avec le schéma présenté (HVL) sur le problème du tube à choc, sur l'intervalle  $]0,1[$  avec une discontinuité sur la pression et la densité, placée à  $x = 0.5$ .

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$\rho_1 = 1. \quad p = 1. \quad u = 0.$$

$$\rho_2 = .125 \quad p_2 = .1 \quad u = 0.$$

Les pas d'espace et de temps sont constants

$$\Delta x = .01$$

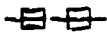

$$\Delta t = .001428$$

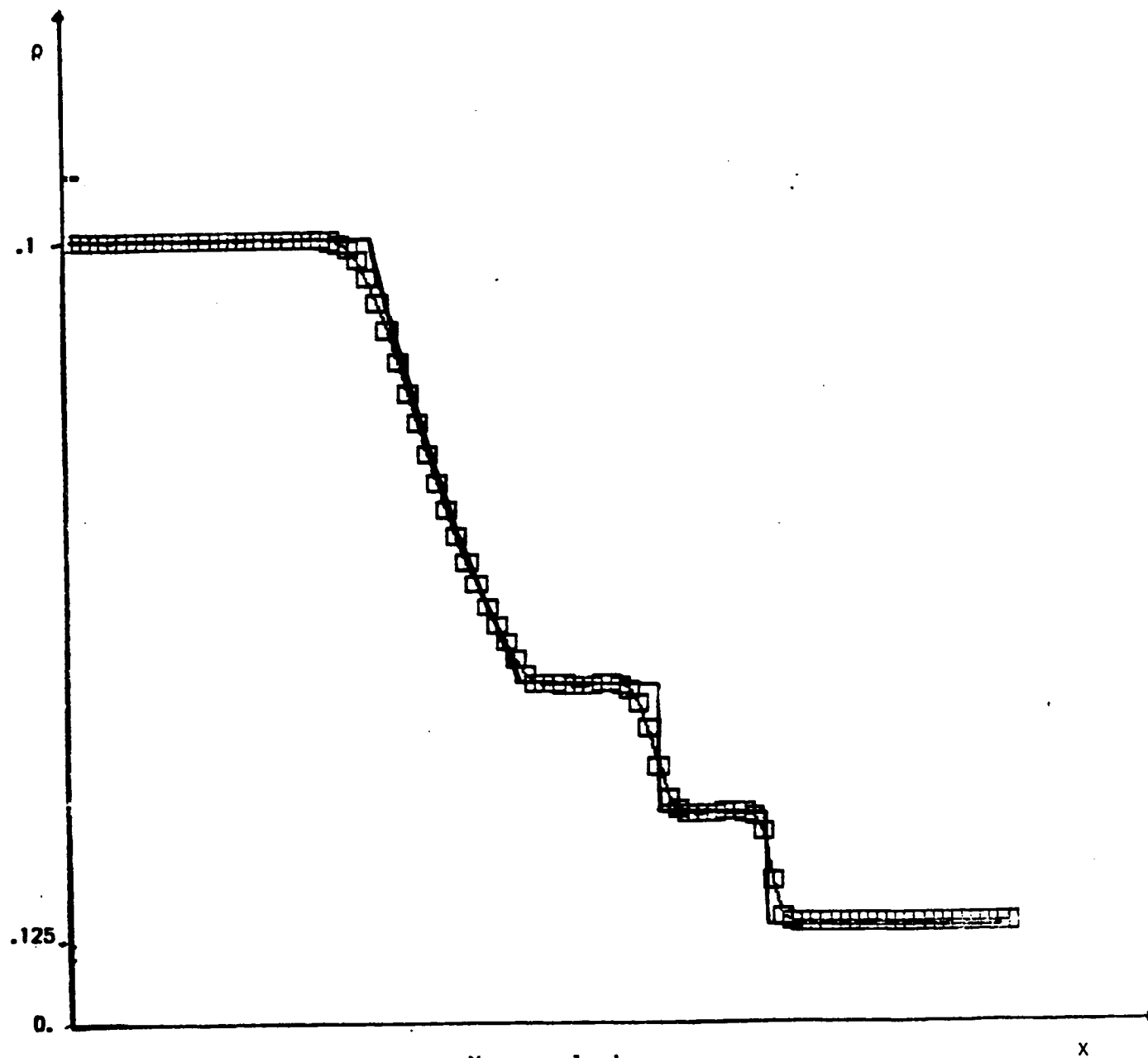
Les résultats (courbes de densité, pression et vitesse) sont présentés à  $t = .1428$ .

Ces résultats sont comparés avec la solution exacte : figures 0.1 à 0.3.

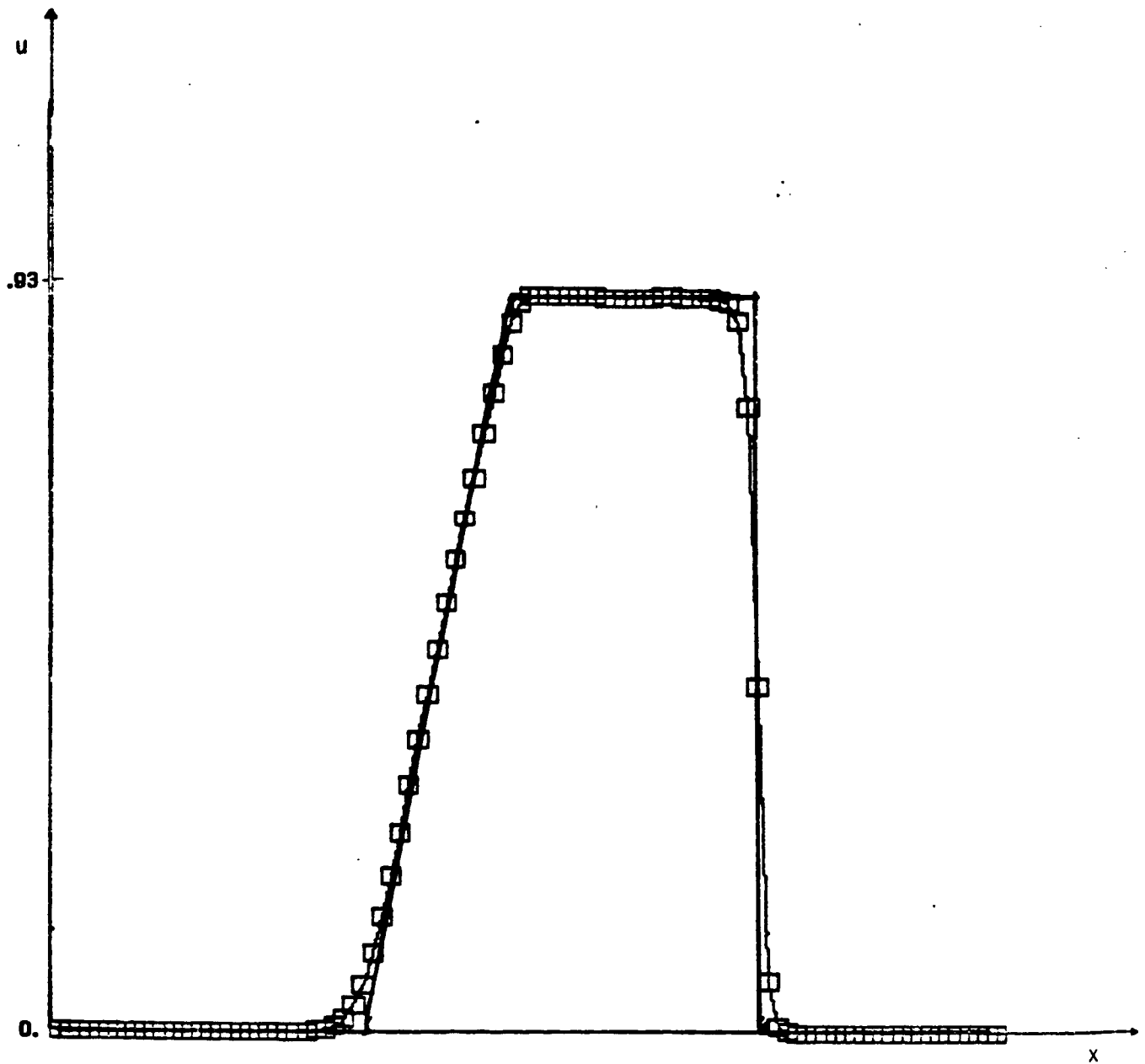
D'autre part on a comparé les résultats obtenus avec le schéma décentré d'ordre un de Godunov (qu'on obtient à partir du schéma HVL en mettant les pentes à zéro), avec la solution exacte au même temps et pour les mêmes données numériques : figures 0.4 à 0.6.

Cette comparaison montre clairement l'avantage de la montée en précision.

Légende :     solution approchée  
                  solution exacte



**Figure 0.1** : Tube à choc 1 D : Masse volumique  
Schéma HVL



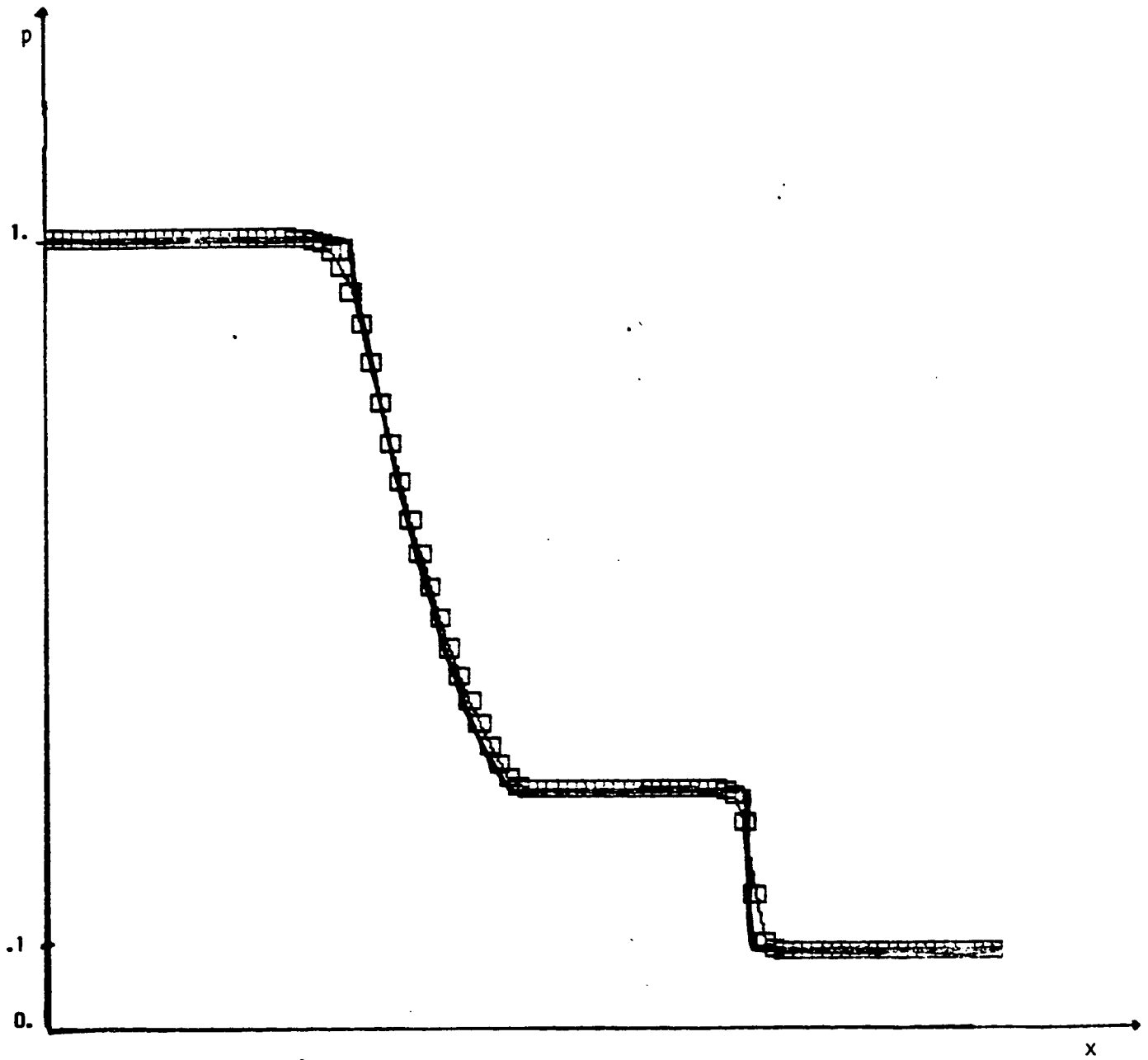
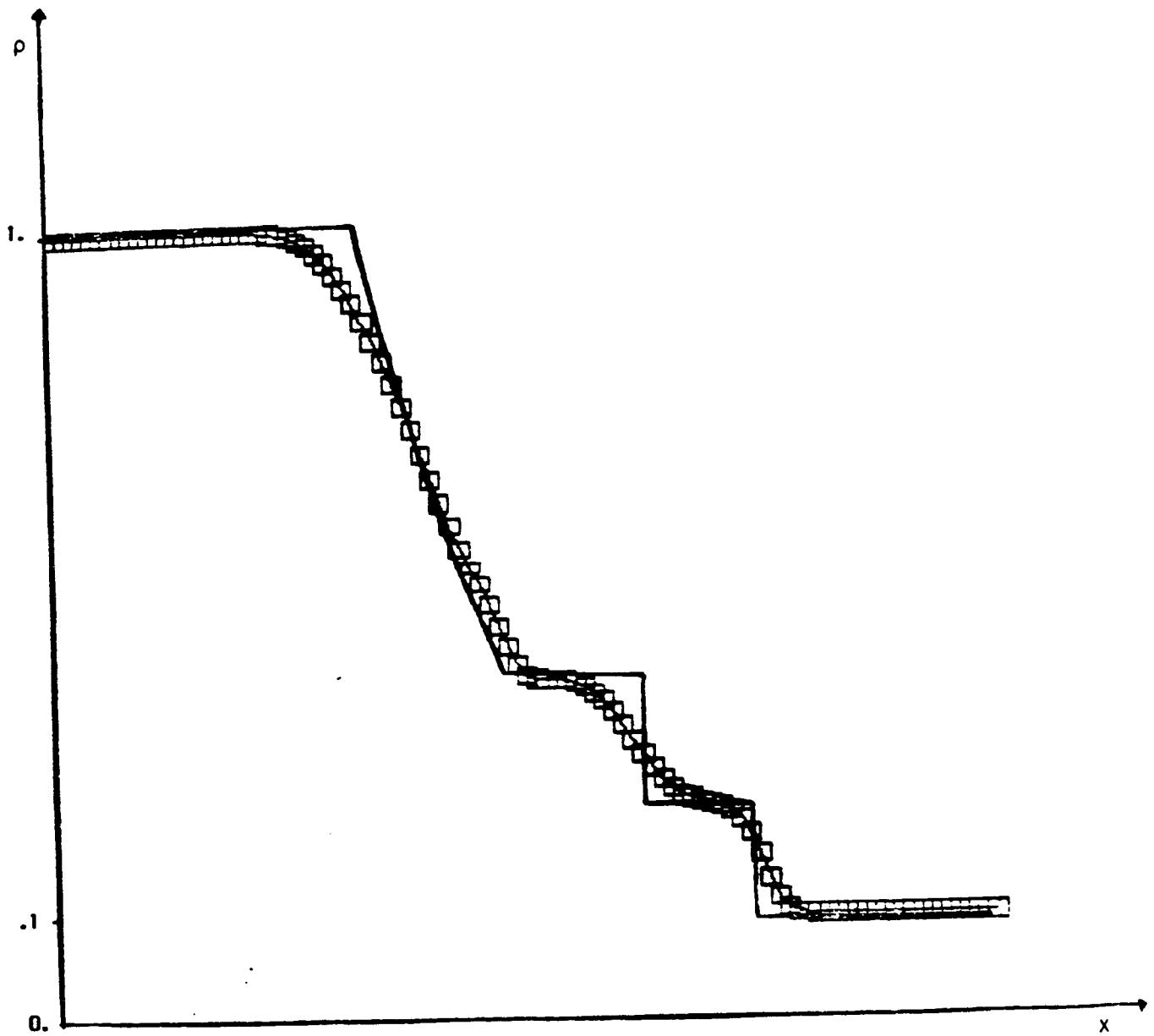
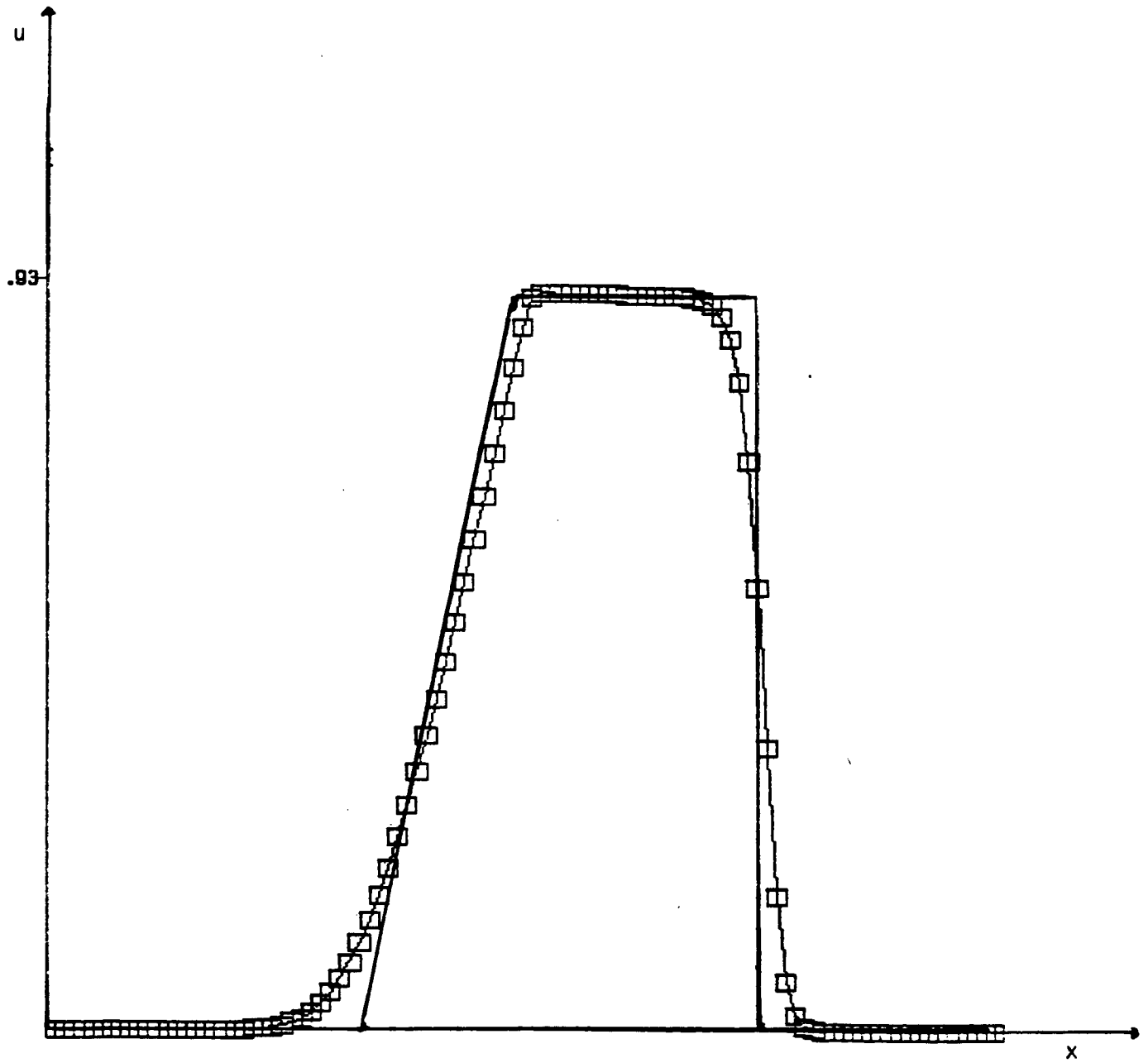


Figure 0.3 : Tube à choc 1 D : Pression  
Schéma HVL



**Figure 0.4** : Tube à choc 1 D : Masse volumique  
Schéma d'ordre un





**Figure 0.5 : Tube à choc 1 D : Vitesse**  
**Schéma d'ordre un**

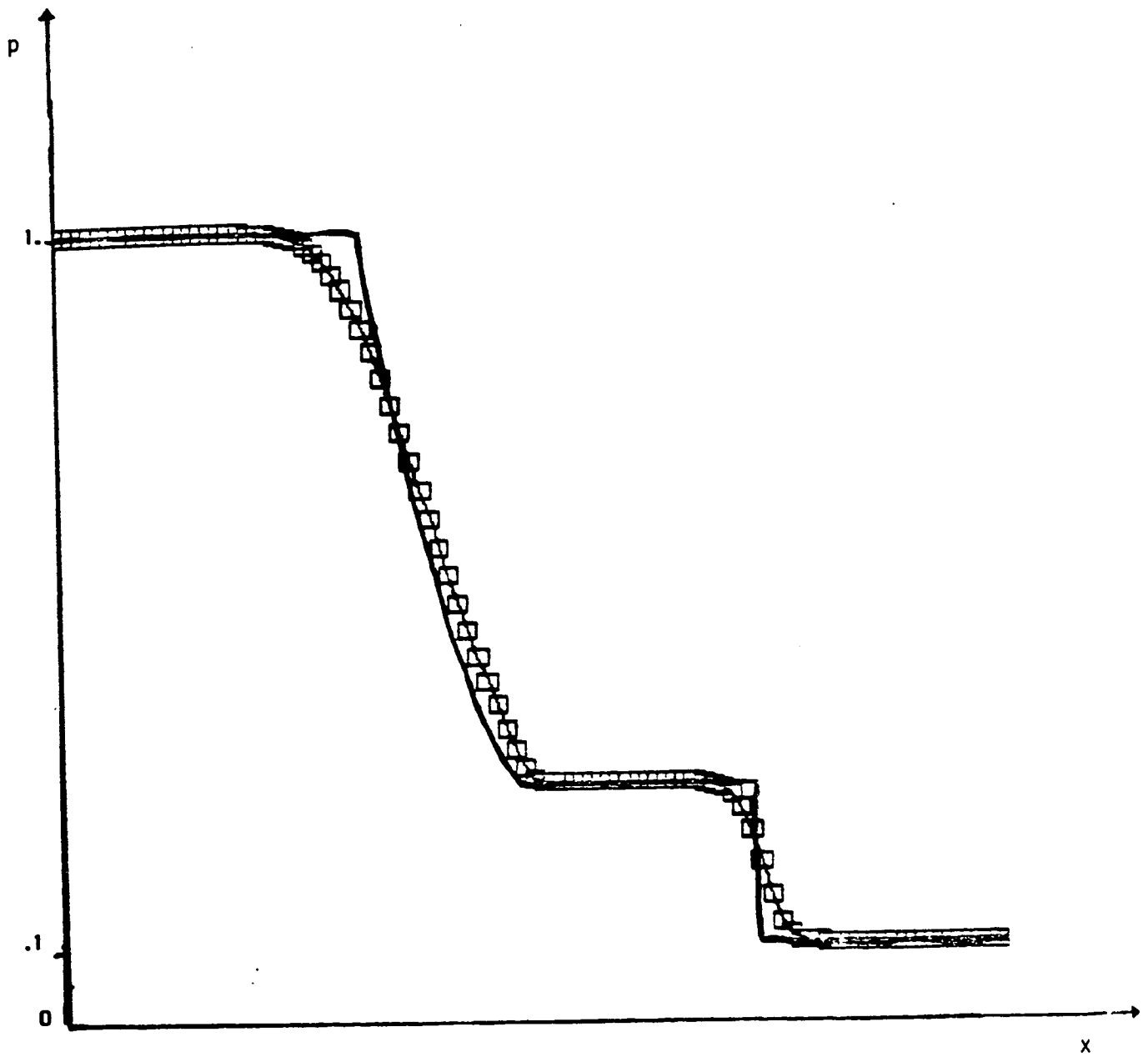


Figure 0.6 : Tube à choc 1 D : Pression  
Schéma d'ordre un

## II. LE CAS BIDIMENSIONNEL

### II.1 Le problème continu

Le système d'Euler à deux dimensions d'espace s'écrit en formulation conservative :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_t + F(W)_x + G(W)_y = 0 \\ W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} ; \quad F(W) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{bmatrix} ; \quad G(W) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

$\rho$  ,  $p$  ,  $e$  sont les variables définies en (I.1),  $u$  , et  $v$  sont les composantes de la vitesse.

On utilisera la forme matricielle du système,

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_t + A(W) W_x + B(W) W_y = 0 \\ A(W) = F'(W) , \quad B(W) = G'(W) \end{array} \right.$$

Les fonctions  $F$  et  $G$  sont homogènes

$$\text{ie :} \quad F(W) = A(W) W , \quad G(W) = B(W) W$$

Les matrices  $A$  et  $B$  sont diagonalisables.

Le système s'écrit en variables physiques  $\rho, u, v, p$ .

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{W}_t + \tilde{A}(\tilde{W}) \tilde{W}_x + \tilde{B}(\tilde{W}) \tilde{W}_y = 0 \\ \tilde{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

On trouvera dans [12] la définition des matrices  $\tilde{A}, \tilde{B}$  ainsi que les matrices de passage entre celles-ci et les matrices  $A$  et  $B$ .

On veut résoudre (2.1) pour  $(x,y)$  appartenant à un ouvert  $\Omega$  borné de  $\mathbb{R}^2$  et pour  $t$  positif ; avec une condition initiale :

$$(2.4) \quad W(x,y,0) = W_0(x,y) \quad (x,y) \in \Omega$$

Les conditions aux bords que nous avons imposées sont celles décrites dans [1] p.28.

## II.2 Description du schéma

### II.2.1 Approximation en espace

#### A - Maillage : Eléments finis

La discrétisation en espace utilisée repose sur celle des éléments finis  $P_1$  conforme (Lagrange de degré 1).

Rappelons brièvement que cela consiste à définir une subdivision  $T_h$  de  $\Omega$

par des triangles.

$$\Omega = \bigcup_{k \in T_h} k \quad k \text{ triangle}$$

avec  $k \cap k' = \begin{cases} \emptyset \\ \text{ou 1 sommet} \\ \text{ou 1 côté} \end{cases} \quad \forall k, k' \in T_h$

Les noeuds de la triangulation sont les sommets des triangles. Les degrés de liberté sont les valeurs de l'inconnue  $W$  aux noeuds de la triangulation.

$$W_i = W(a_i, t)$$

$$a_i = \text{Sommet} \quad ; \quad i = 1, ns$$

$$ns = \text{Nombre de sommets.}$$

### B - Formulation variationnelle : volumes finis

Pour chaque noeud  $a_i$ , le contour de la cellule  $C_i$  ("volume de contrôle") est défini en joignant les milieux des côtés adjacents à  $a_i$  et les centres de gravité des triangles dont  $a_i$  est sommet.

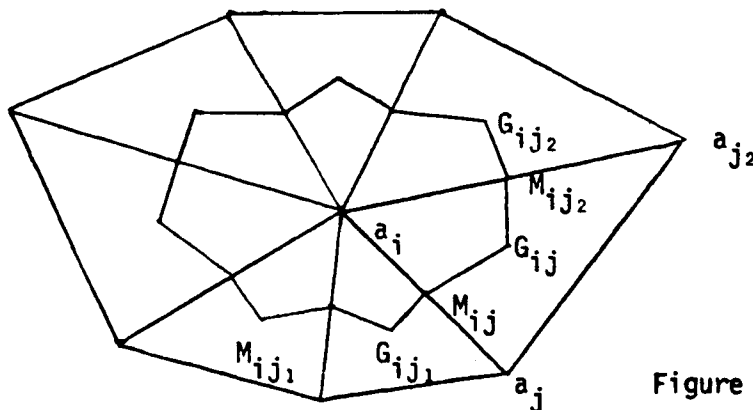


Figure 2.1 Cellule  $C_i$

Soit  $S_h$  l'espace d'approximation des fonctions constantes sur chaque cellule.

$$S_h = \left\{ v \in L^2(\Omega) ; v|_{C_i} = \text{const.} ; i = 1, ns \right\}$$

L'ensemble des fonctions  $(\chi_i)_{i=1,ns}$  définies par :

$$\chi_i(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in C_i \\ 0 & \text{Si non} \end{cases}$$

est une base de  $S_h$ .

On cherche  $W$  solution des équations

$$(2.5) \quad \int_{\Omega} (W_t + F(W)_x + G(W)_y) \chi_j dx dy = 0 \quad j = 1, ns$$

Ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^{ns} \int_{C_i} (W_t + F(W)_x + G(W)_y) \chi_j dx dy = 0 \quad j = 1, ns$$

$C_i$  étant le support de  $\chi_i$  on a :

$$\int_{C_i} (W_t + F(W)_x + G(W)_y) dx dy = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, ns$$

On intègre par parties cette dernière équation en supposant  $W_t$  constant en  $(x,y)$  sur  $C_i$  ; - on obtient :

$$(2.6) \quad \text{aire}(C_i) W_t + \int_{\partial C_i} (F(W) v_x + G(W) v_y) d\sigma = 0$$

où :

$\partial C_i =$  frontière de  $C_i$

$\vec{v} = (v_x, v_y)$  est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de  $C_i$

Notons  $l_{ij} = [G_{ij} M_{ij}] \cup [M_{ij} G_{ij}]$

où  $G_{ij}$ ,  $G_{ij1}$  sont les centres de gravité des triangles  $[a_i, a_j, a_{j2}]$  et  $[a_i, a_j, a_{j1}]$  respectivement.

On peut alors écrire (2.6) sous la forme :

$$(2.7) \quad \text{aire}(C_i) W_t + \sum_{j=1}^{N_i} \phi_{ij} = 0$$

où  $N_i$  est le nombre de sommets voisins de  $a_i$  et

$$(2.8) \quad \phi_{ij} = \int_{l_{ij}} (F(W) v_x + G(W) v_y) d\delta$$

On calculera les flux  $\phi_{ij}$  comme dans le cas monodimensionnel, par une formule d'intégration à un point (le point  $M_{ij}$ , milieu du segment  $[a_i, a_j]$ ).

On précisera le calcul des  $\phi_{ij}$  dans (II.2.2)

## II.2.2 Le schéma en temps

Quand elles ne sont pas redéfinies, les notations sont les mêmes que dans (I.2).

## A - Prédiction

### A.1 Calcul du prédicteur en variables physiques : $\tilde{W}^{n+1/2}$

$$\tilde{W}_i^{n+1/2} = \tilde{W}_i^n - \frac{\Delta t}{2} (\tilde{A}_i^n P_i^n + \tilde{B}_i^n Q_i^n)$$

où

$$\tilde{A}_i^n = \tilde{A}(\tilde{W}_i^n)$$

$$\tilde{B}_i^n = \tilde{B}(\tilde{W}_i^n)$$

$P_i^n$  et  $Q_i^n$  sont respectivement une approximation des dérivées  $\tilde{W}_x$  et  $\tilde{W}_y$  sur  $C_i$ .

On obtient  $P_i^n$  et  $Q_i^n$  en interpolant linéairement  $W$  sur chaque triangle et on fait une moyenne arithmétique des dérivées sur tous les triangles voisins de  $a_i$ .

### A.2 Calcul des valeurs d'intégration : $W_{ij}$ et $W_{ji}$

Sur chaque segment  $[a_i, a_j]$  ( $a_j$  noeud voisin de  $a_i$ )

On calcule 2 valeurs de  $W$  au milieu du segment.

$$(2.9) \quad \tilde{W}_{ij}^{n+1/2} = (\tilde{W}^{n+1/2}|_{C_i})(M_{ij})$$

$$\tilde{W}_{ji}^{n+1/2} = (\tilde{W}^{n+1/2}|_{C_j})(M_{ij})$$

On calcule  $\tilde{W}_{ij}^{lim}$  et  $\tilde{W}_{ji}^{lim}$  (valeurs limitées) par le procédé de

limitation décrit dans I.2.B



### A.3 Calcul des flux en variables conservatives

On calcule les flux  $\Phi_{ij}$  définies par (2.8) avec les valeurs limitées du prédicteur  $W^{n+1/2}$  au point  $M_{ij}$  après le passage en variables conservatives.

On note :

$$v_{ij}^0 = (v_{xij}^0, v_{yij}^0), \text{ normale unitaire à } G_{ij} M_{ij}, \text{ dirigée vers l'extérieur de } C_i$$

$$v_{ij}^1 = (v_{xij}^1, v_{yij}^1), \text{ normale unitaire à } M_{ij} G_{ij1}, \text{ dirigée vers l'extérieur de } C_i$$

$$\eta_{xij} = v_{xij}^0 \text{ longueur } (G_{ij} M_{ij}) + v_{xij}^1 \text{ longueur } (M_{ij} G_{ij1})$$

$$\eta_{yij} = v_{yij}^0 \text{ longueur } (G_{ij} M_{ij}) + v_{yij}^1 \text{ longueur } (M_{ij} G_{ij1})$$

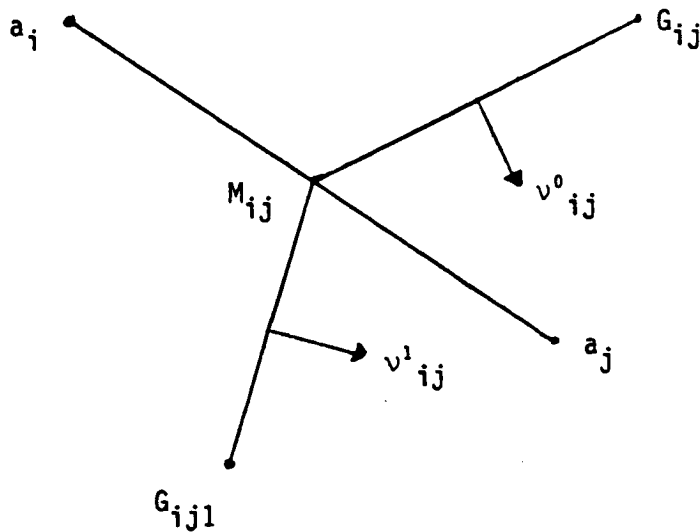


Figure 2.2

On définit les matrices :

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{ij} (.) = [\eta_{xij} A + \eta_{yij} B] (.), \\ P_{ij} = T_{ij} \Lambda_{ij} T_{ij}^{-1}, \quad P_{ij}^{\pm} = T_{ij} \Lambda_{ij}^{\pm} T_{ij}^{-1} \\ \frac{P_{ij}^{\pm}}{2} = P_{ij}^{\pm} \left( \frac{W_{ij} + W_{ji}}{2} \right), \end{array} \right.$$

où les indices supérieurs  $n + 1/2$  et  $lim$ , sont omis sur les variables  $W_{ij}$  et  $W_{ji}$ .

On trouvera la description des matrices  $T_{ij}$  et  $T_{ij}^{-1}$  dans [12].

On définit une approximation de  $\phi_{ij}$  par :

$$(2.11) \quad \phi_{ij} = \frac{P_{ij}^+}{2} W_{ij} - \frac{P_{ij}^-}{2} W_{ji}$$

### B - Correction

On calcule  $W^{n+1}$  par :

$$(2.12) \quad W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\text{aire } C_i} \sum_{j=1}^{N_i} \phi_{ij}^{n+1/2}$$

où  $N_i$  est le nombre de noeuds voisins de  $a_i$  ; et  $\phi_{ij}^{n+1/2}$  est calculé par (2.11) avec les variables  $W_{ij}^{lim}$  et  $W_{ji}^{lim}$ , au temps  $t = (n + \frac{1}{2}) \Delta t$ .

## II.3 Expériences numériques

### II.3.1 Le problème du tube à choc

Nous avons fait un test sur le problème du tube à choc dans un ouvert  $\Omega = ]0,1[^2$  de  $\mathbb{R}^2$ , pour observer l'effet du maillage.

La triangulation est régulière, comparable à un maillage des différences finies.

Les conditions initiales sont les mêmes que dans le cas monodimensionnel (cf I.4) avec :

$$v = 0$$

où  $v$  est la deuxième composante de la vitesse.

Les résultats à  $t = 0.16$ , pour le schéma HVL, sont présentés dans les figures 1.1 à 1.3.

Les figures 1.4 à 1.6 représentent la courbe de température obtenue dans les mêmes conditions numériques, avec les deux versions du schéma de Van Leer (HVL)

Fig 1.4      HVL + limitation ponctuelle

Fig 1.5      HVL + limitation globale.

La figure 1.6 représente la courbe obtenue avec le schéma d'ordre un de Godunov.

On remarquera une perte sensible de la précision sur le cas du schéma avec la limitation globale (1.5).

Ceci explique la recherche d'autres techniques de limitation dans le cas d'un maillage de type éléments finis.

On notera cependant qu'avec la limitation séparée on n'arrive pas à amortir toutes les oscillations.

### II.3.2 Le canal avec obstacle en arc de cercle :

La simulation numérique d'un écoulement transsonique autour d'un obstacle circulaire a été réalisée sur un test proposé au workshop du GAMM [15]

On a utilisé un maillage en éléments finis triangulaires comportant  $72 \times 21$  sommets.

On calcule l'écoulement transsonique correspondant à un Mach à l'infini de 0.85.

Les conditions aux bords sont obtenues par intégration de la pression, sans vérification des relations de compatibilité.

La solution stationnaire est présentée à  $t = 32.24$  avec un résidu (norme  $l_2$  de  $\Delta\rho/\Delta t$ ) de l'ordre de  $10^{-4}$ .

Les figures 2.1 à 2.5 représentent les résultats obtenus avec le schéma présenté (HVL + limitation ponctuelle).

On observera la présence d'oscillations parasites seulement dans le voisinage immédiat du choc.

Cela est particulièrement évident sur la courbe de déviation d'entropie où l'on remarque un fort "over-shoot"

Le choc est obtenu sans points à l'intérieur pour la distribution du Mach et celle du coefficient de pression.

On pourra comparer ces résultats avec ceux obtenus par le schéma de Lax-Wendroff à deux pas avec un terme de viscosité artificielle (figures 3.1. à 3.5). [1]

Sur la figure 4, on a représenté la courbe de déviation de l'entropie obtenue par le schéma de Lax-Wendroff, celui de Montagné [6] et le schéma présenté.

On remarque que tous ces schémas génèrent de l'entropie numérique avant le choc, avec cependant des niveaux différents pour chacun d'eux.

Si l'on prend comme référence le schéma de Lax-Wendroff pour lequel l'entropie générée entre le point d'arrêt et le choc est de l'ordre de 0.001, on remarque que le schéma de Montagné [6] génère deux fois plus d'entropie et celui de Van Leer avec une limitation ponctuelle 20 % de plus que celui de Lax-Wendroff, sans l' "under-shoot" au point d'arrêt que l'on observe pour Lax-Wendroff.

Quant aux niveaux d'entropie après le choc, ils sont comparables :

0.012	pour le schéma de Lax-Wendroff
0.014	pour le schéma de Montagné
0.013	pour le schéma de Van Leer + limitation ponctuelle.

Les différences étant cohérentes avec les entropies générées avant le choc. tous ces résultats nous amènent à conclure sur ce test que ces trois schémas donnent des résultats quantitativement voisins avec quelques nuances que l'on se propose d'accentuer sur un second test plus sévère.

### II.3.3 Ecoulement autour d'un profil

L'écoulement transsonique autour d'un profil NACA 0012 avec un angle d'incidence  $\alpha = 0^\circ$  a été simulé numériquement avec les données suivantes :

- Le Mach à l'infini est de 0.8
- L'écoulement initial est uniforme
- Le maillage est de type éléments finis triangulaires avec 600 éléments (triangles)

La solution stationnaire est obtenue à  $t = 5.6$  au bout de 4100 itérations avec un pas de temps local et un C.F.L. de 0.7.

Le résidu est de l'ordre de  $10^{-9}$ .

Les figures 5.1 à 5.5 représentent les résultats obtenus avec le schéma HVL avec la fonction de flux numérique de Godunov (formule 1.10), et les limiteurs ponctuels.

On a comparé ces résultats avec ceux obtenus par d'autres schémas :

Veuillot - Viviand et Rizzi	(fig. 5.6) [15]
Lax-Wendroff	(fig. 5.7) [1]

pour la courbe du coefficient de pression ( $C_p$ ).

On remarque que la courbe de  $C_p$  obtenue par le schéma HVL ne monte pas suffisamment par rapport au  $C_p$  obtenu par les schémas cités plus haut.

On notera aussi que le choc n'est pas très bien positionné (choc en avance sur la courbe du  $C_p$  de HVL).

La figure (5.8) compare la courbe de déviation d'entropie pour les deux schémas HVL et Lax-Wendroff. On précise que dans ce cas, la fonction de flux numérique de HVL est celle du Q-Schéma (formule 1.8).

Ceci explique la différence entre cette courbe et celle de la figure 5.4 (amortissement de l'oscillation au niveau du choc).

En conclusion, ce dernier test montre que le schéma présenté ne donne pas

de meilleurs résultats que celui de Lax-Wendroff.

Mais le premier demeurant plus facile à implémenter (pas de réglage de la viscosité), ces résultats incitent à poursuivre dans cette voie (décentrage + limiteurs) en augmentant d'une part la précision, et d'autre part en recherchant un meilleur critère de monotonie.

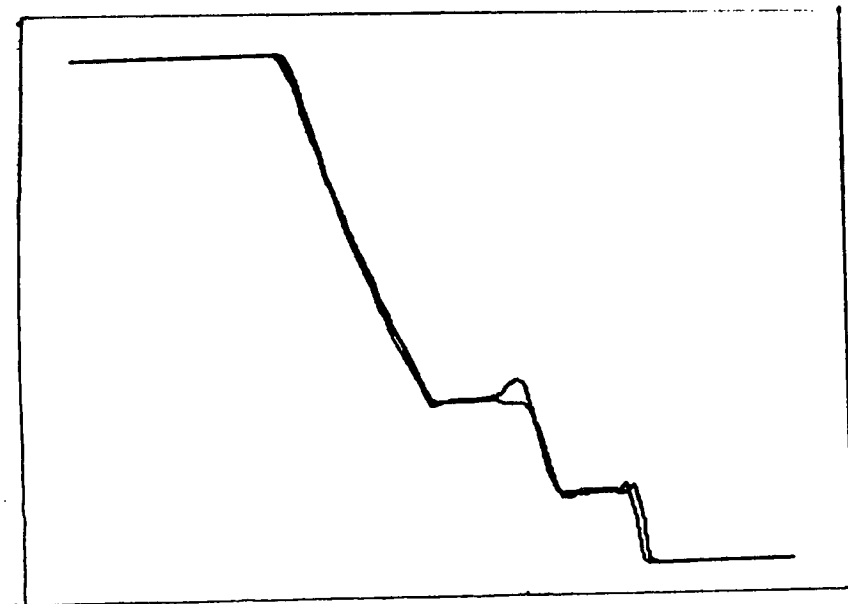


Figure 1.1 : Densité

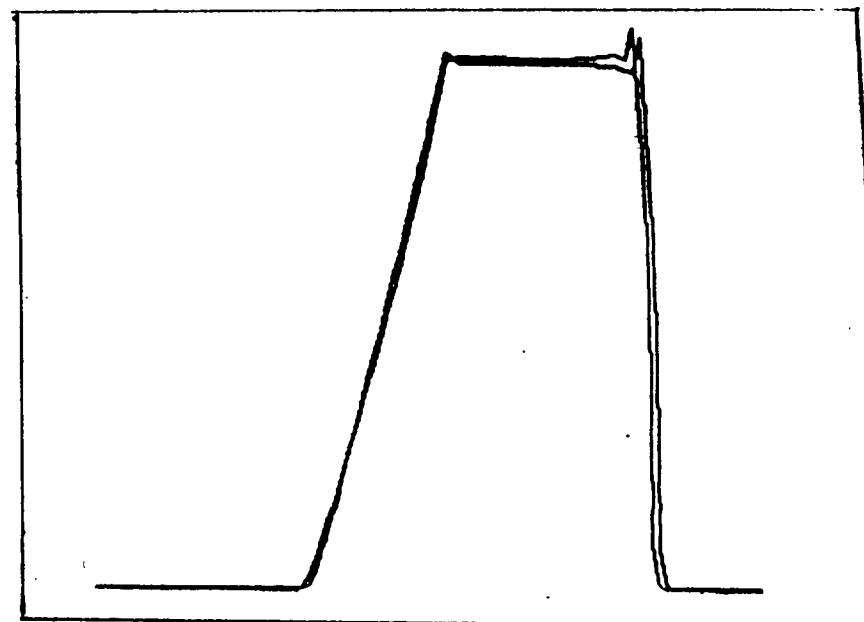


Figure 1.2 : Vitesse

36 -

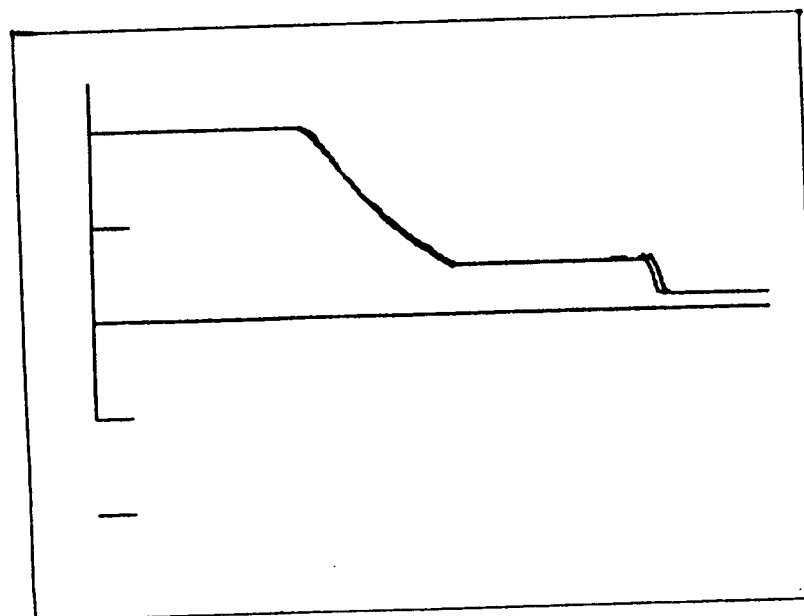
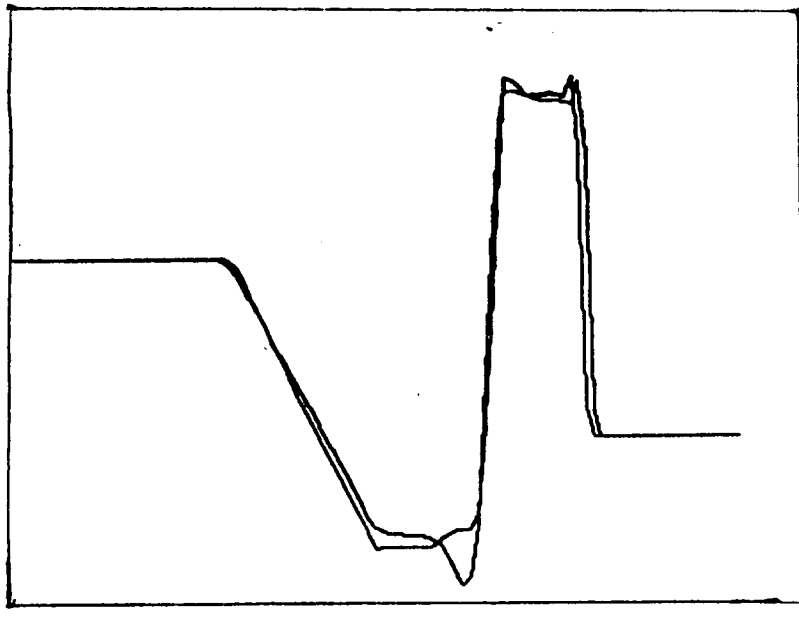


Figure 1.3 : Pression

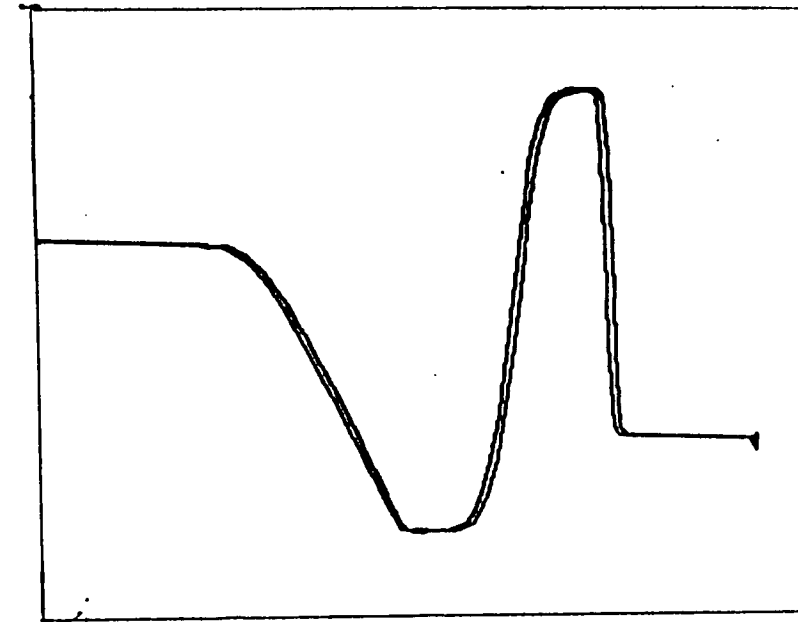
Figures 1.1 à 1.3

Tube à choc - schéma présenté

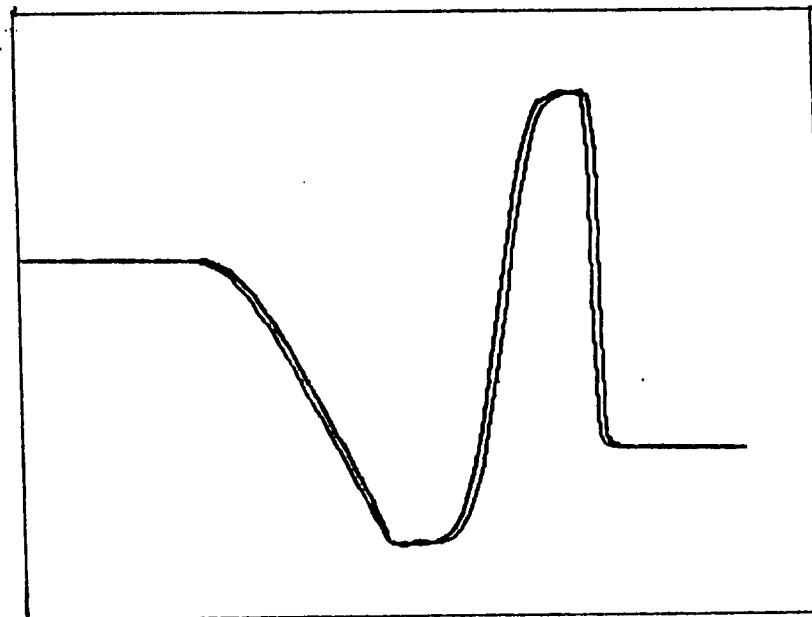




**Figure 1.4** : Température pour le schéma de Van Leer + Limitation ponctuelle



**Figure 1.5** : Température pour le schéma de Van Leer + Limitation globale



**Figure 1.6** : Température pour le schéma de Godunov

**Figures 1.4 à 1.6**

**Tube à choc**  
**Comparaison des trois**  
**schémas étudiés**

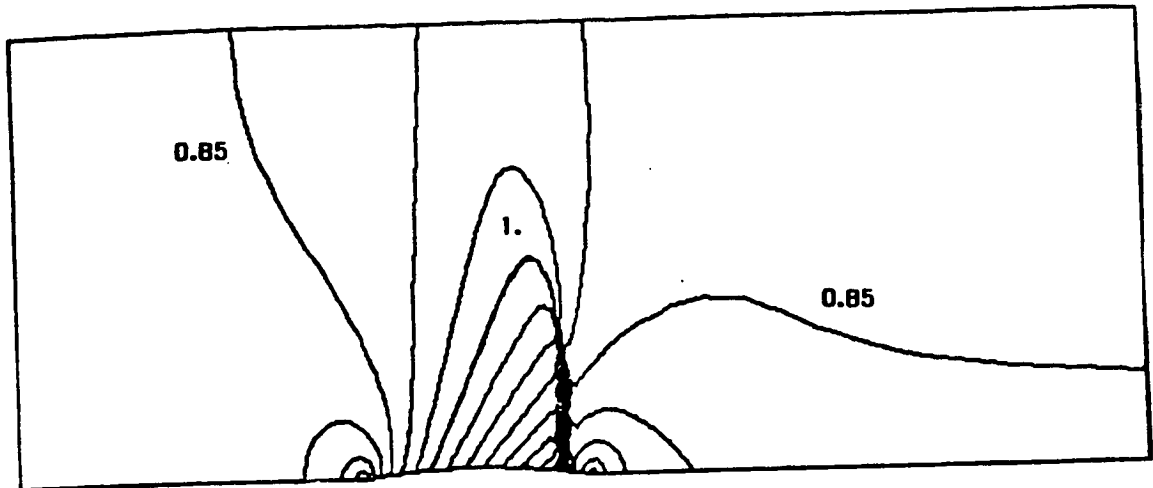


Figure 2.1 : Canal du GAMM à  $M_\infty = 0.85$   
Lignes Iso-Mach

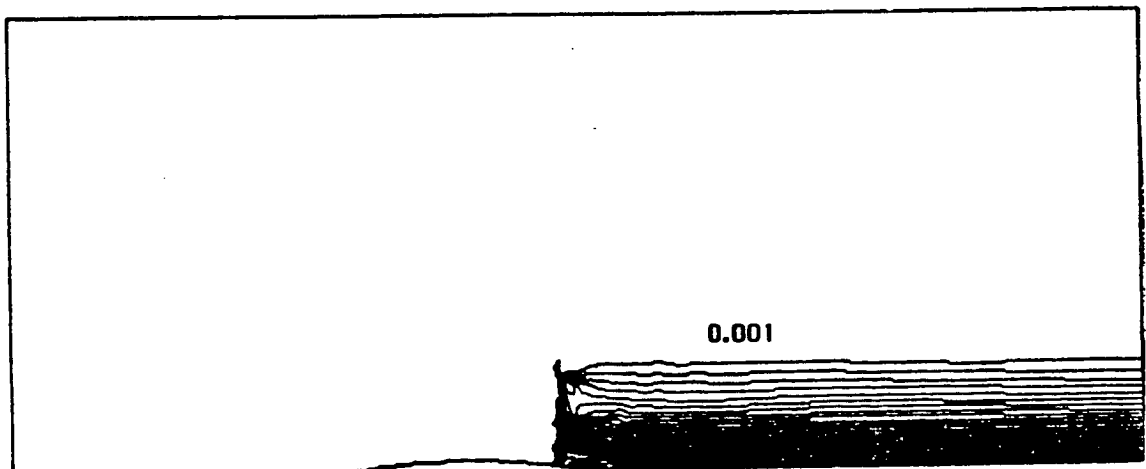
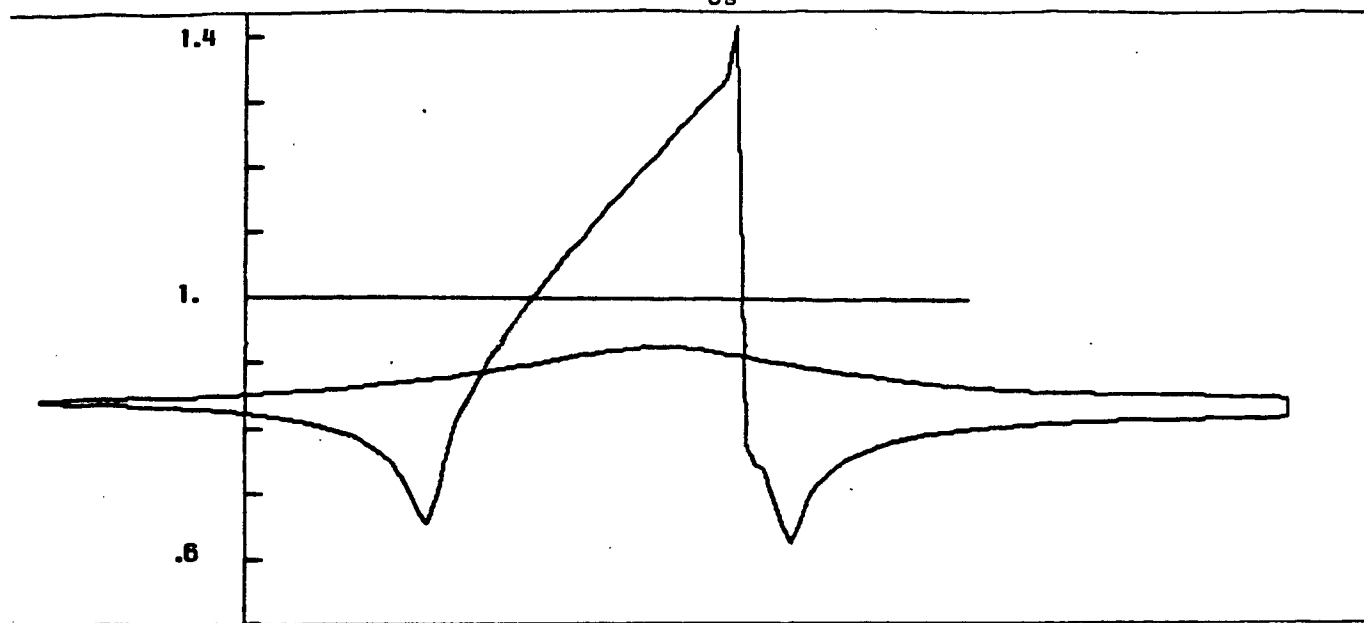
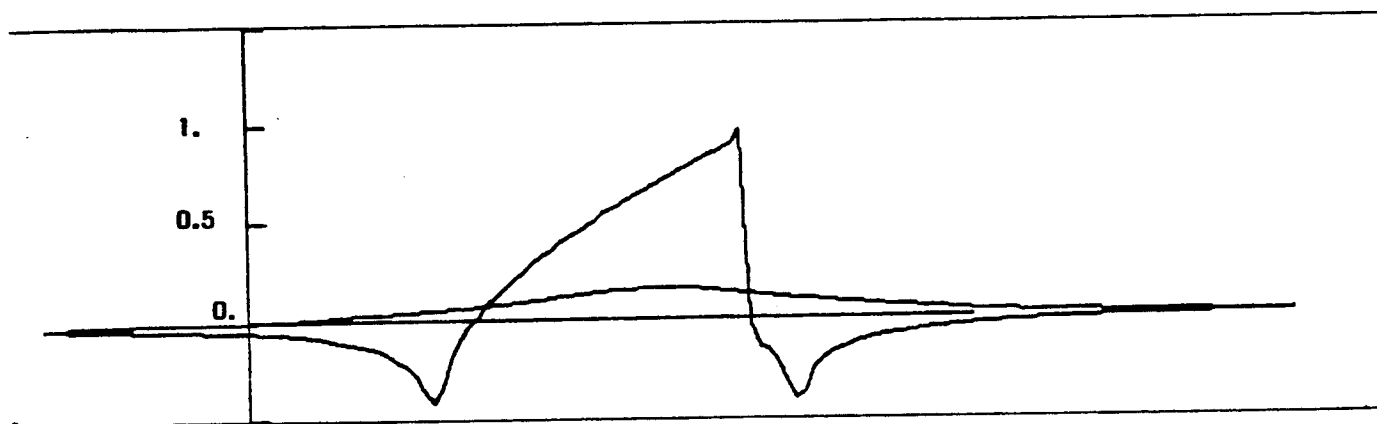


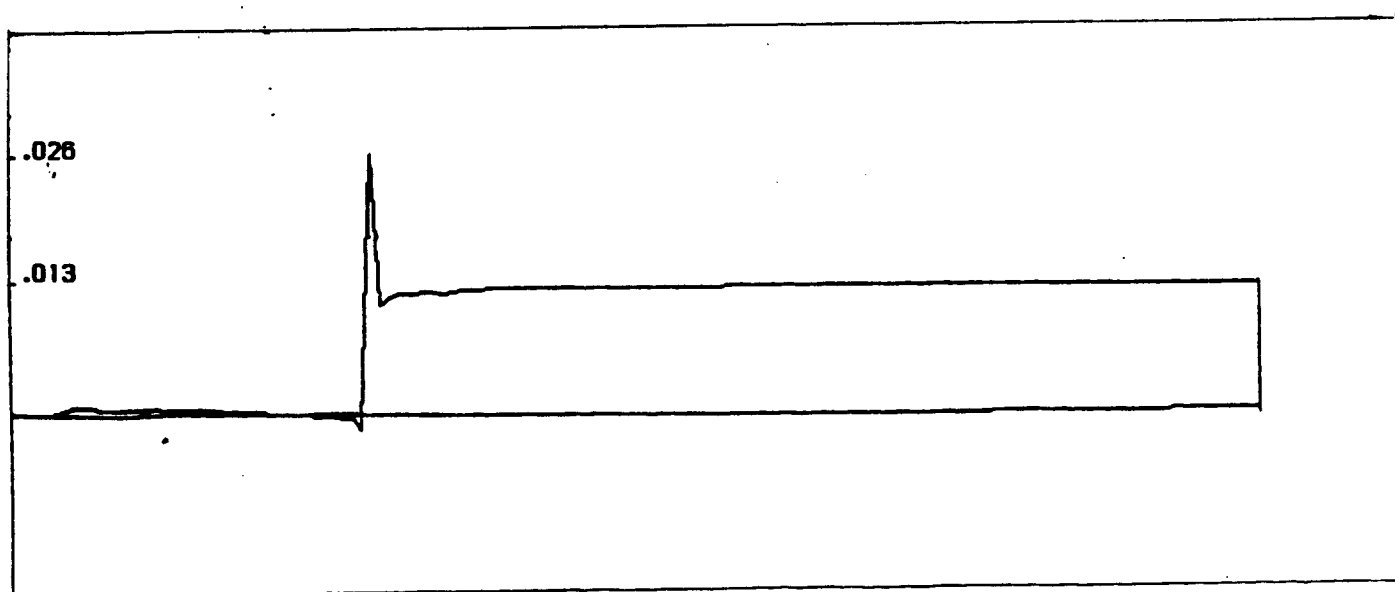
Figure 2.2 : Canal du GAMM à  $M_\infty = 0.85$   
Lignes Iso-entropie



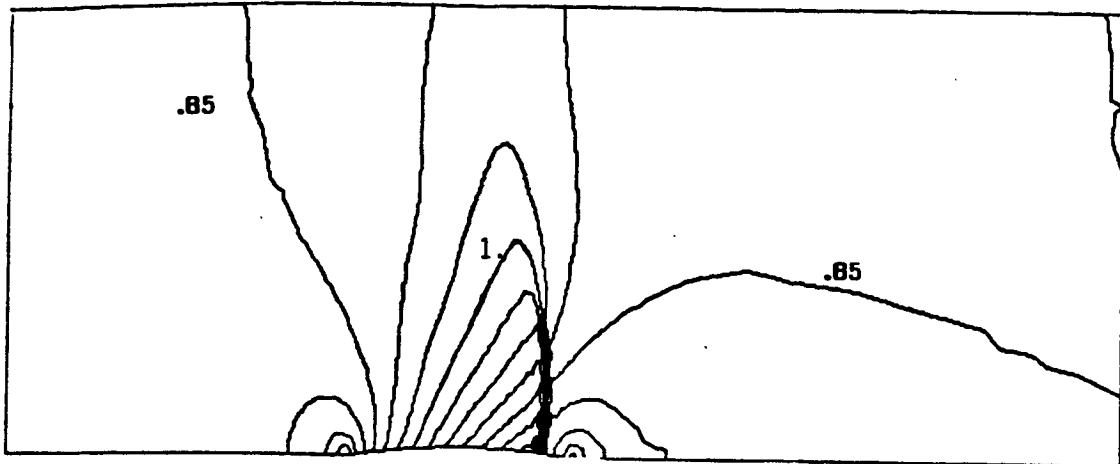
**Figure 2.3 : Canal du GAMM à  $M_\infty = .85$ ; Distribution du Mach**



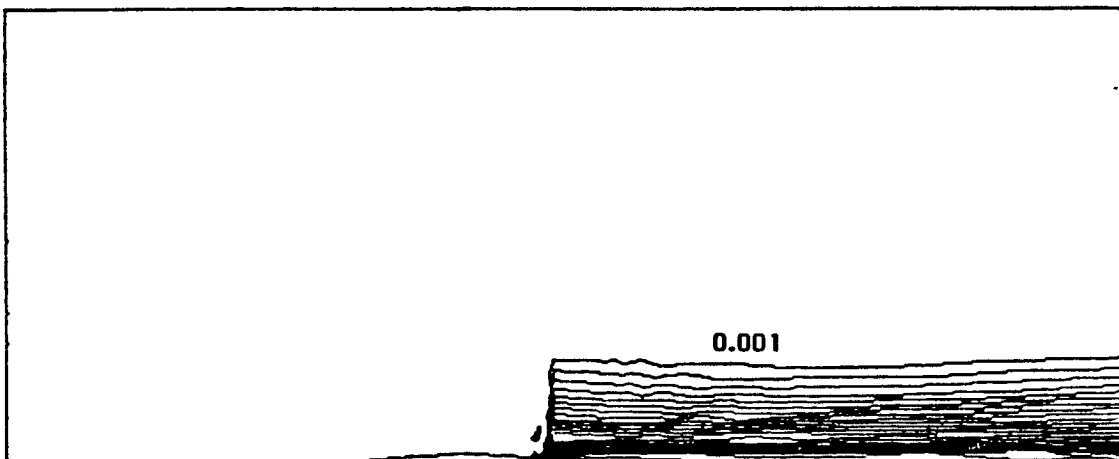
**Figure 2.4 : Canal du GAMM à  $M_\infty = .85$ ; Distribution du coefficient de pression**



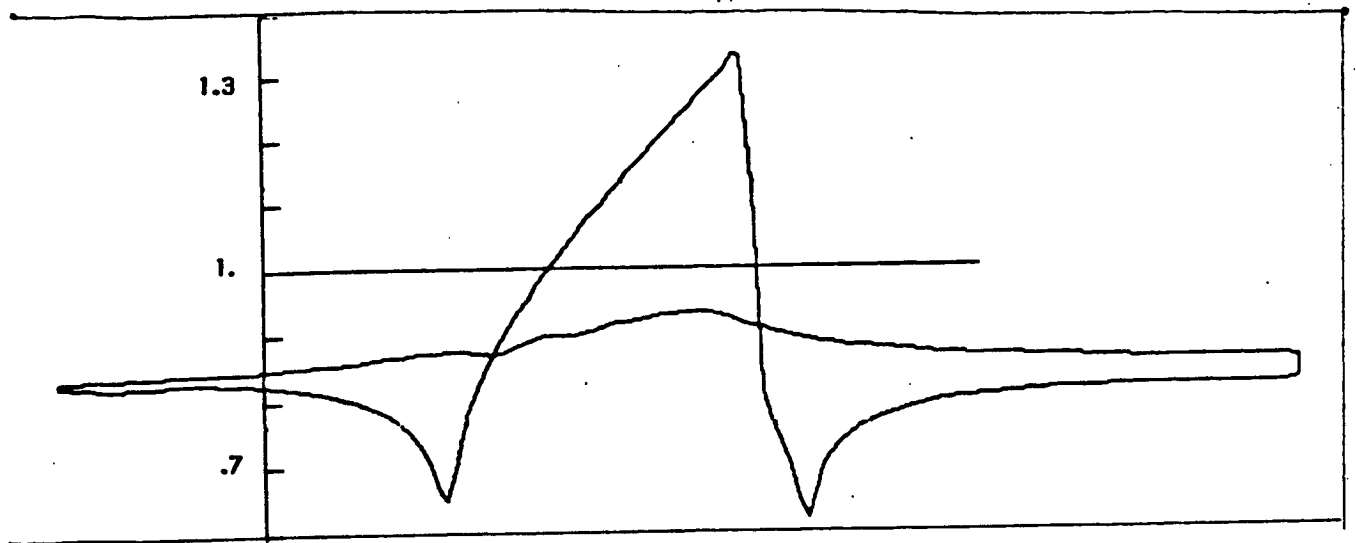
**Figure 2.5 : Canal du GAMM à  $M_\infty = .85$ ; Distribution de la déviation d'entropie**



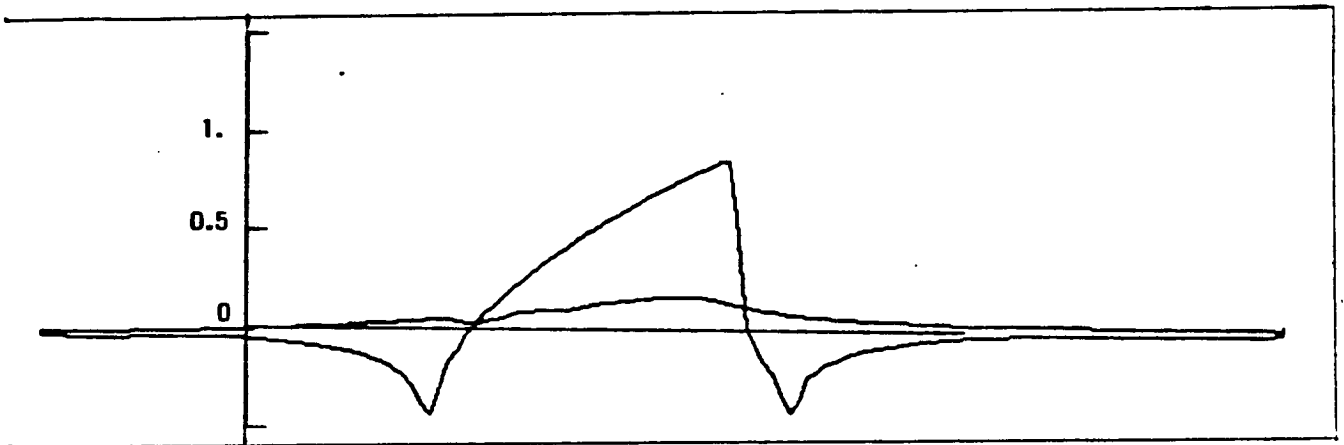
**Figure 3.1** : Canal du GAMM à  $M_\infty = .85$   
Lignes Iso-Mach pour le schéma LW



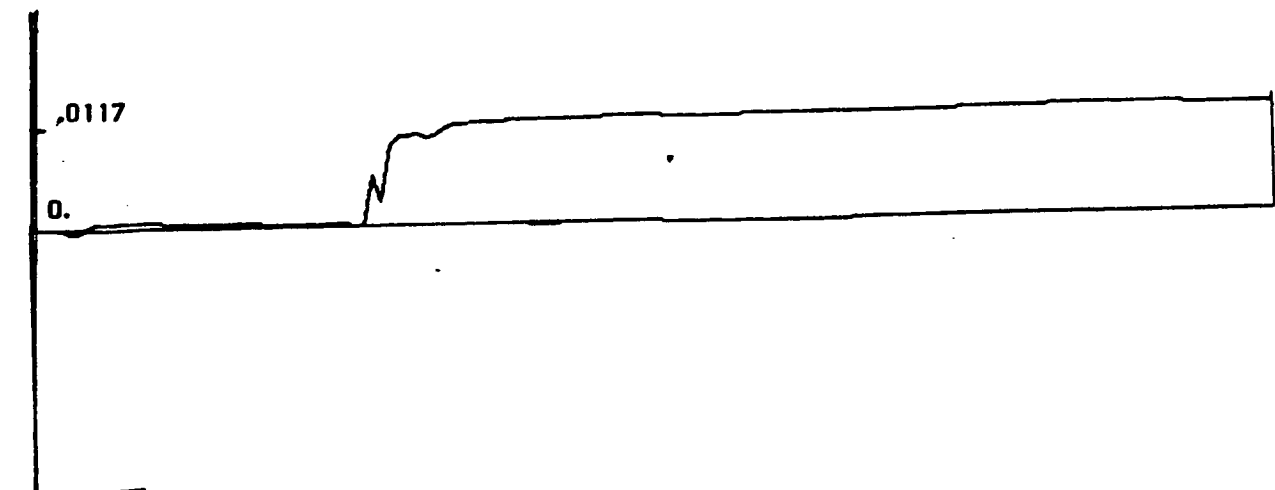
**Figure 3.2** : Canal du GAMM à  $M_\infty = .85$   
Lignes Iso-entropie pour le schéma LW



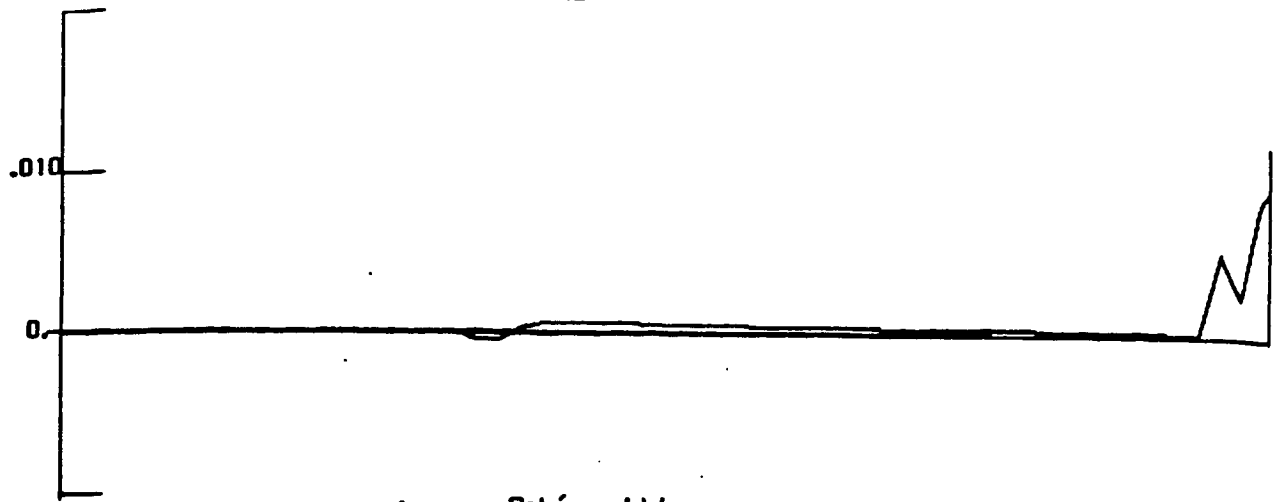
**Figure 3.3** : Canal du GAMM à  $M_\infty = .85$ ; Distribution du Mach pour le schéma LW



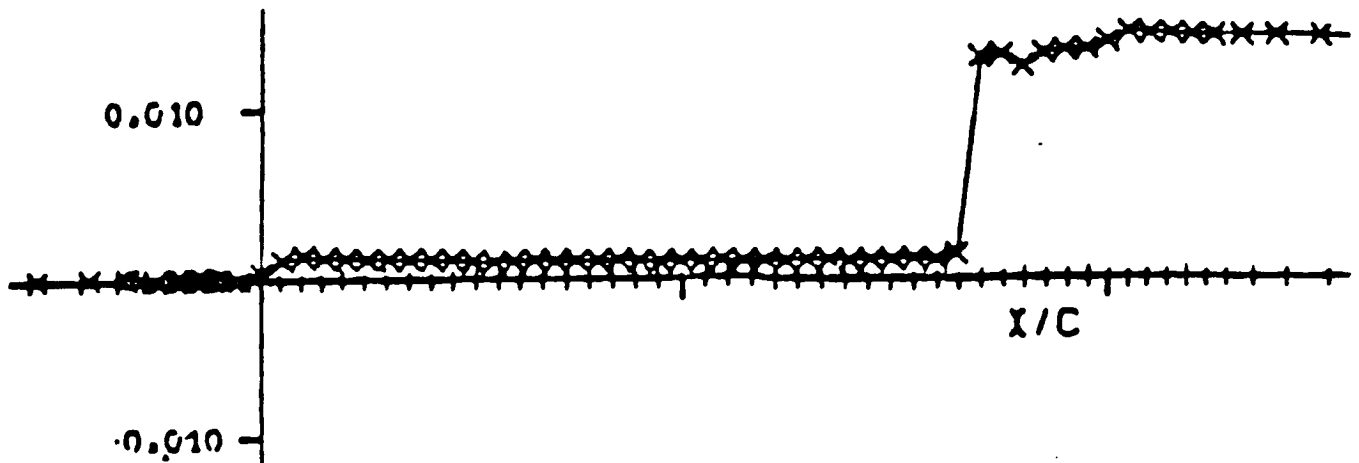
**Figure 3.4** : Canal du GAMM à  $M_\infty = .85$ ; Distribution du coefficient de pression pour le schéma LW



**Figure 3.5** : Canal du GAMM à  $M_\infty = .85$ ; Distribution de la déviation d'entropie pour le schéma LW



4.a. Schéma LW



4.b. Schéma de Montagné { 6 } (Limitation globale)

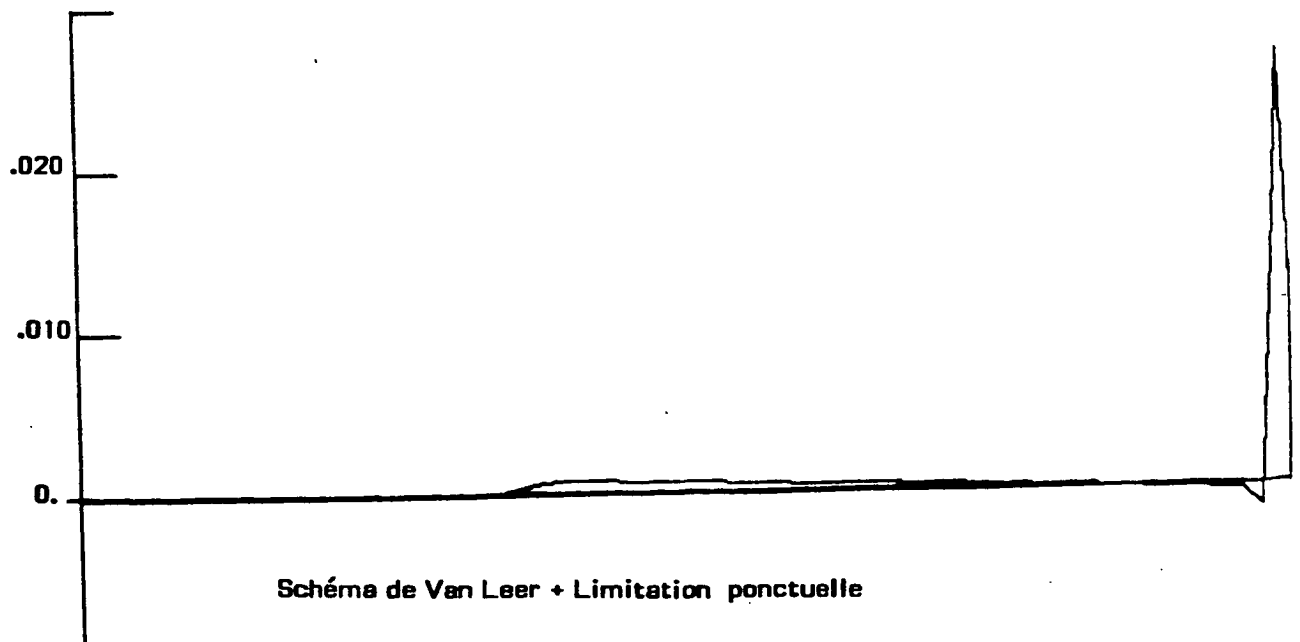
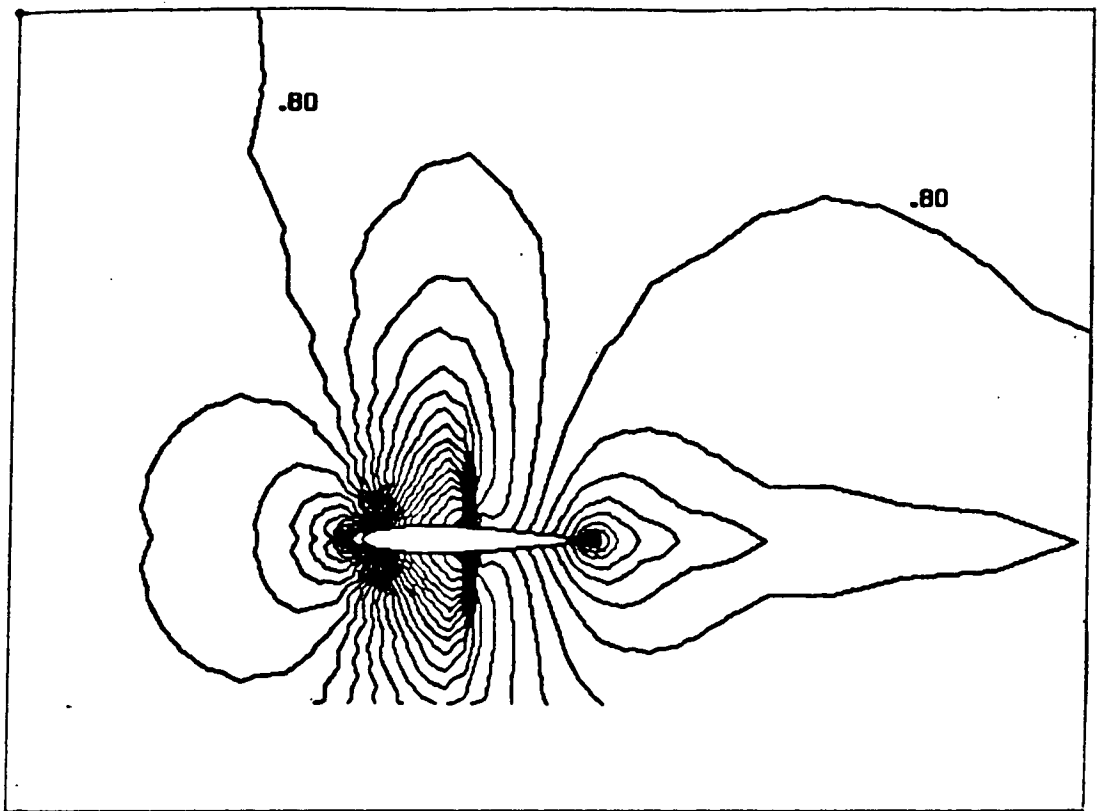
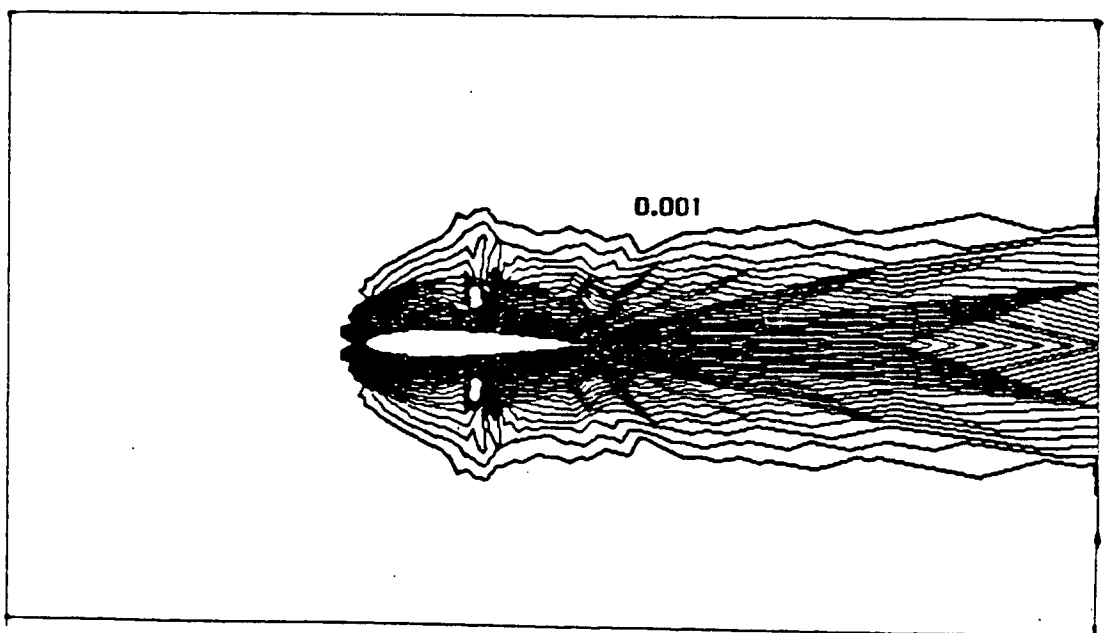


Schéma de Van Leer + Limitation ponctuelle

Figure 4 : Canal du GAMM à  $M_\infty = .85$ ; Déviation de l'entropie



**Figure 5.1 :** NACA 0012 à  $M_\infty = .80$ ,  $\alpha = 0^\circ$ .  
Lignes Isomach (incrément = .025)



**Figure 5.2 :** NACA 0012 à  $M_\infty = .80$ ,  $\alpha = 0^\circ$ .  
Lignes Isoentropiques (incrément = 0.001)

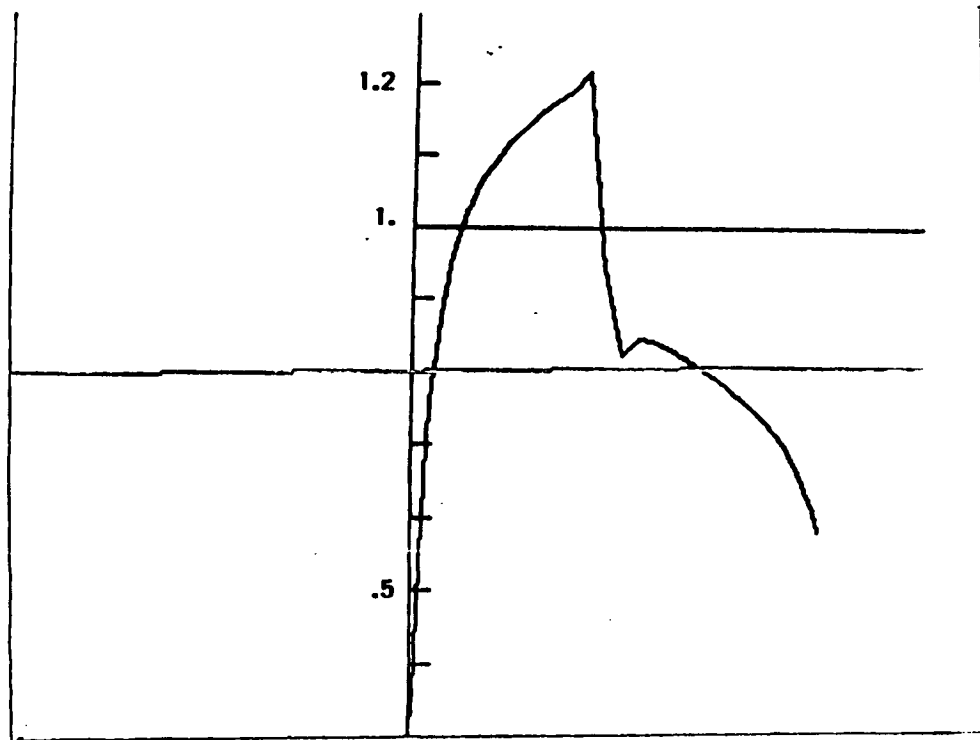


Figure 5.3 : NACA 0012 à  $M_\infty = .80$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  
distribution du Mach \*

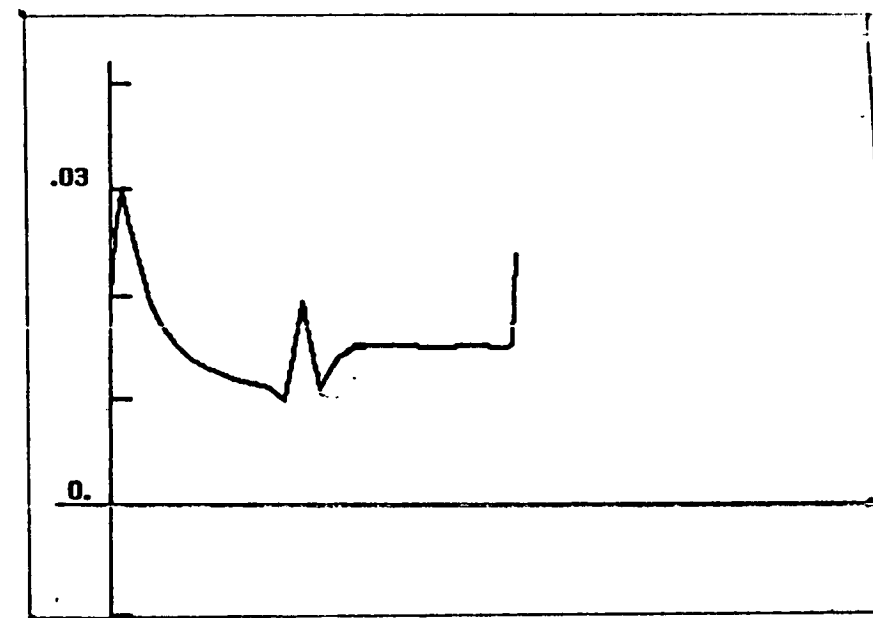


Figure 5.4 : NACA 0012 à  $M_\infty = .80$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  
distribution de la déviation d'entropie \*

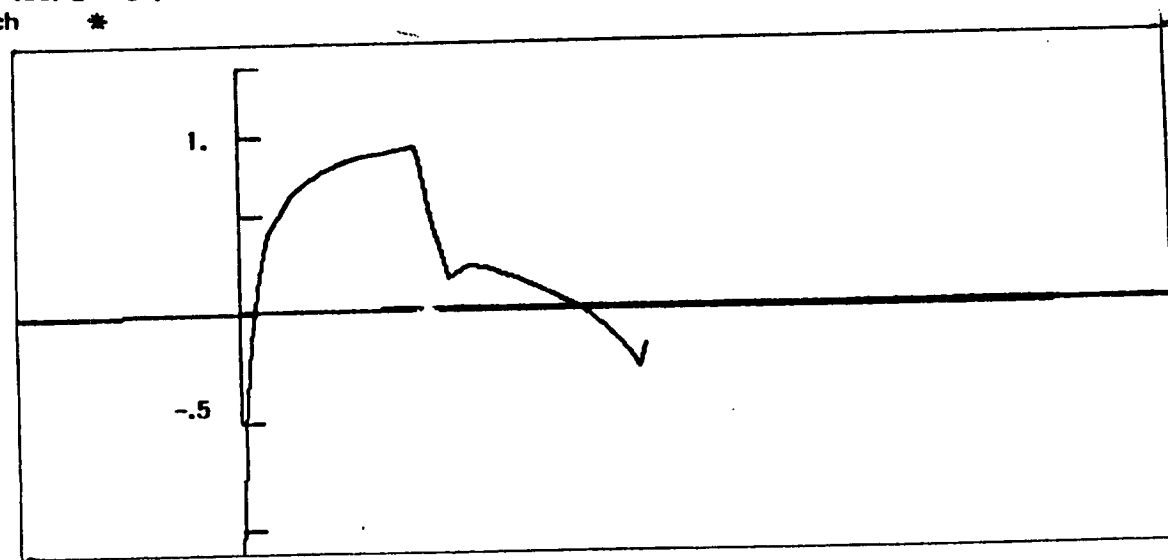


Figure 5.5 : NACA 0012 à  $M_\infty = .80$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  
distribution du coefficient de pression \*

\* le long du profil



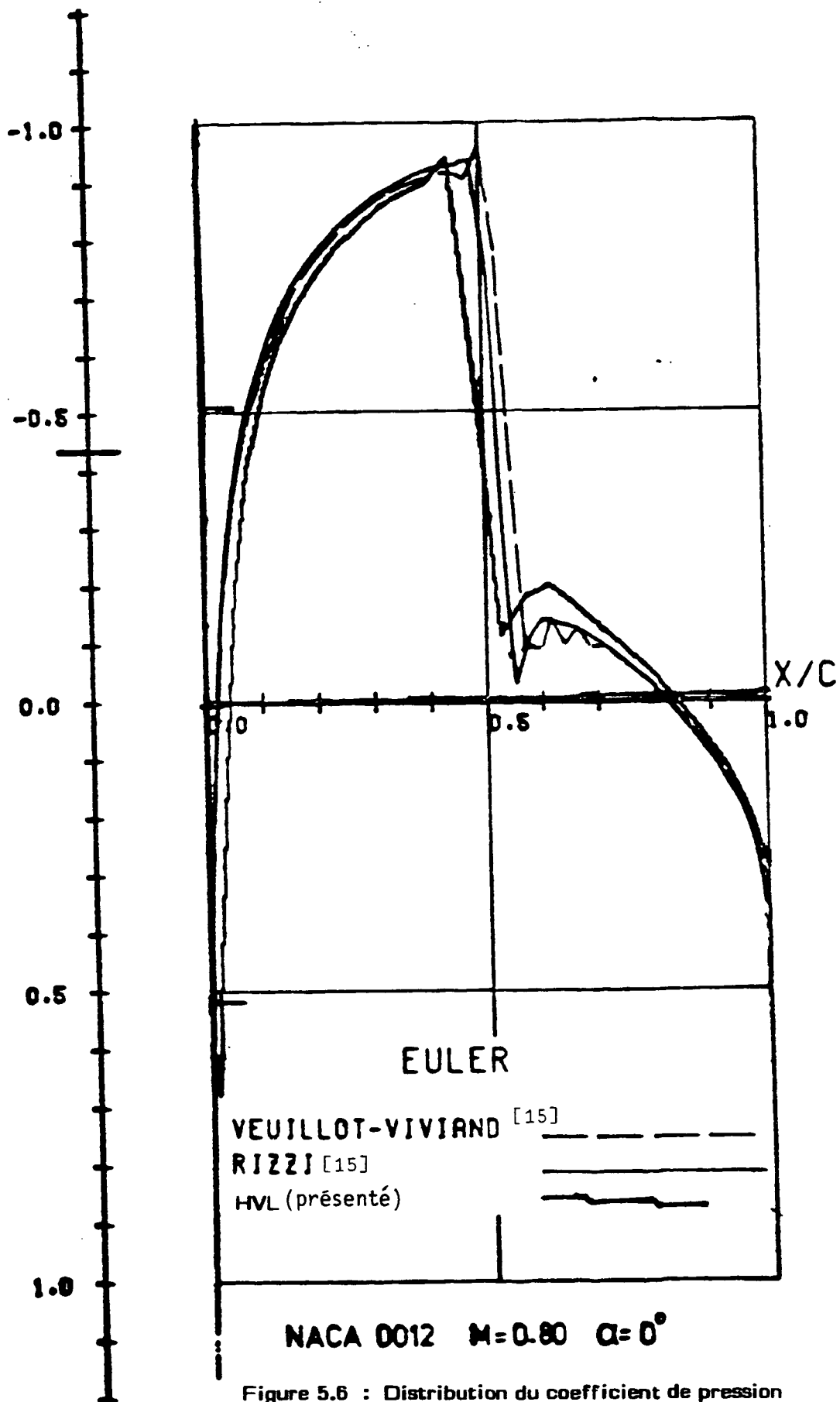
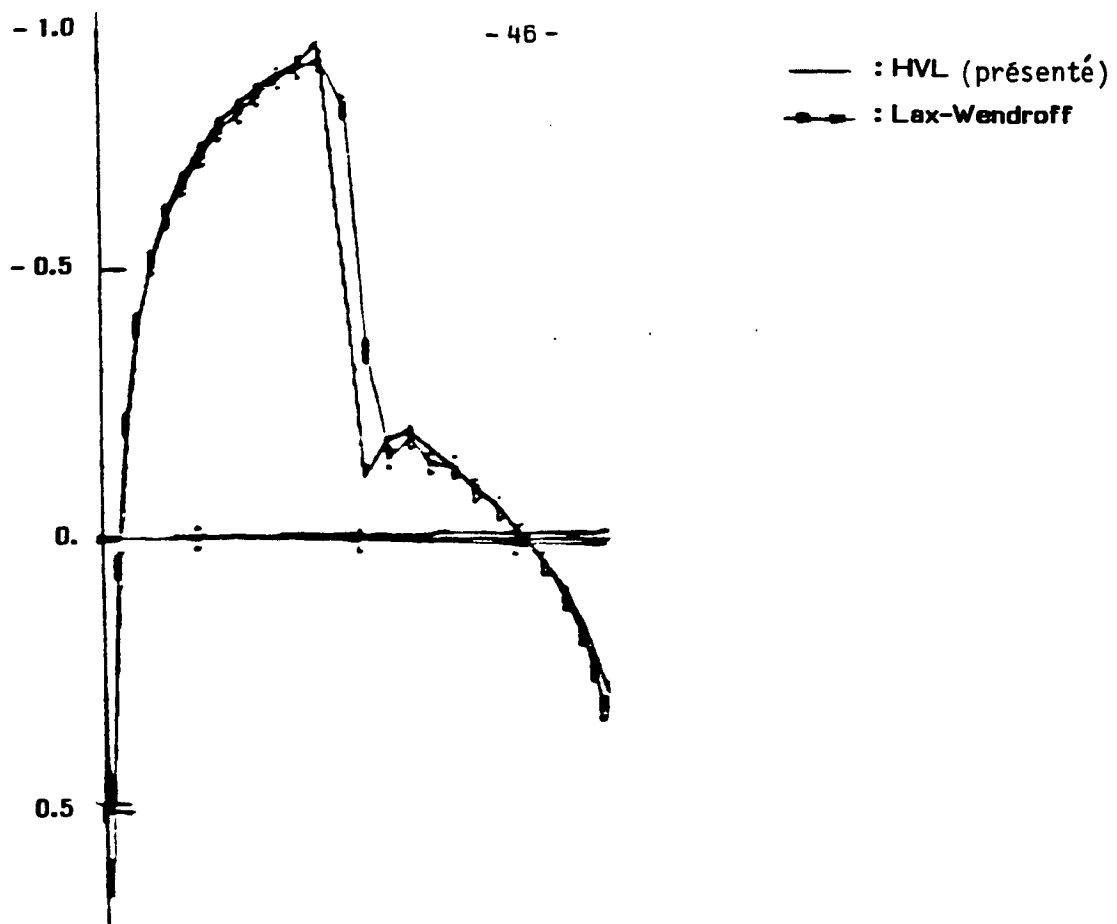


Figure 5.6 : Distribution du coefficient de pression



**Figure 5.7 : NACA 0012 à  $M_\infty = .80$ ,  $\alpha = 0^\circ$**   
 Distribution du coefficient de pression



**Figure 5.8 : NACA 0012 à  $M_\infty = .80$ ,  $\alpha = 0^\circ$**   
 Distribution de la déviation d'entropie

### III. BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANGRAND F., DERVIEUX A., LOTH L., VIJAYASUNDARAM G.,  
Simulations of Euler Transsonic Flow by Means of Finite  
Element-type Schemes . INRIA Report N° 250, 1983.
- [2] ANGRAND F., DERVIEUX A.,  
Some explicit triangular finite element schemes for the Euler  
equations ;  
Inter. Jour. for Num. Methods in Fluids, Vol 4, pp. 749-764 (1984)
- [3] HARTEN A.,  
High Resolution Schemes for hyperbolic Conservation Laws.  
Journal of Comp. Physics, vol 49 pp. 357-393 (1983)
- [4] HARTEN A., HYMAN J.R., LAX P.D.,  
On finite Difference Approximations and Entropy Conditions  
for Shocks.  
Comm. on pure and applied math., Vol 29, pp. 297-322 (1976)
- [5] HARTEN A., LAX P.D., VAN LEER B.,  
On upstream differencing and Godunov type schemes for  
hyperbolic conservation laws.  
Siam Review, vol. 25, N°1 (1983)
- [6] MONTAGNE J.L.,  
A Second Order Accurate Flux Splitting Scheme in Two-  
Dimensional Gas Dynamics  
IC 9 NMFD C.E.N. SACLAY, T.P. ONERA N° 1984-50
- [7] STOUFFLET B.,  
Résolution Numerique des Equations d'Euler des Fluides Parfaits  
Compressibles par des Schémas Implicite en Eléments finis,  
Thèse de 3e cycle, Université Paris VI (1984)
- [8] VAN LEER B.,  
Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme  
I. The Quest of monotonicity ; lecture notes in Physics, vol. 18  
pp. 163 (1972) Springer-Verlag.

- [9] VAN LEER B.,  
II. Monotonicity and Conservation Combined in a Second order Scheme - Journal of Comp. physics Vol. 14, pp. 361-370 (1974)
- [10] VAN LEER B.,  
III. Upstream - Centered Finite Difference Schemes for Ideal Compressible Flow - Journal of Comp. physics, vol. 23, pp 263 275 ( 1977)
- [11] VAN LEER B.,  
Computational Methods for Ideal Compressible-Flow ; Von Karman Institute For Fluid Dynamics, Lectures series 1983-04  
Computational fluid dynamics mach 7-11 1983.
- [12] VIJAYASUNDARAM G.,  
Résolution numérique des Equations d'Euler pour des Ecoulements Transsoniques avec un Schéma de Godunov en Eléments Finis,  
Thèse de 3e Cycle ; Université de Paris VI, 1982.
- [13] VIJAYASUNDARAM G.,  
On numerical Schemes for Solving Euler Equations of Gas Dynamics ;  
Proceedings of the Workshop on Numerical Methods for the Euler Equations for Compressible inviscid fluids (Versailles dec. 1984).  
R. Glowinski Ed., à paraître dans SIAM.
- [14] VIJAYASUNDARAM G.,  
A Second Order upwind finite Element Scheme ; A paraître.
- [15] RIZZI A., VIVIAND H. (Eds.),  
Numerical methods for the computation of inviscid transonic flows with shock waves, Wieweg and Sohn, Braunschweig/ Wiesbaden, 1981.

